3 Ρυθμός αύξησης συναρτήσεων

Ο αυξητικός χαρακτήρας του χρόνου εκτέλεσης ενός αλγορίθμου, ο οποίος ορίστηκε στο Κεφάλαιο 2, μας παρέχει ένα απλό μέτρο για την αποδοτικότητα του αλγορίθμου, ενώ παράλληλα μας επιτρέπει να συγκρίνουμε τις επιδόσεις εναλλακτικών αλγορίθμων. Για αρκετά μεγάλο μέγεθος εισόδου n, η συγχωνευτική ταξινόμηση, με χρόνο εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης $\Theta(n \lg n)$, υπερτερεί της ενθετικής, για την οποία ο αντίστοιχος χρόνος είναι $\Theta(n^2)$. Παρ' όλο που σε ορισμένες περιπτώσεις μπορούμε να προσδιορίσουμε επακριβώς τον χρόνο εκτέλεσης ενός αλγορίθμου, όπως κάναμε για την ενθετική ταξινόμηση στο Κεφάλαιο 2, συνήθως η επιπλέον ακρίβεια δεν αξίζει τον κόπο που θα πρέπει να καταβάλουμε για την επίτευξή της. Για αρκετά μεγάλο μέγεθος εισόδου, η επίδραση των πολλαπλασιαστικών σταθερών και των όρων κατώτερης τάξης επισκιάζεται από την επίδραση του μεγέθους της εισόδου.

Όταν το μέγεθος της εισόδου που εξετάζουμε είναι αρκετά μεγάλο ώστε το μόνο στοιχείο που μας ενδιαφέρει στον χρόνο εκτέλεσης να είναι ο αυξητικός του χαρακτήρας, τότε μελετάμε την ***ασυμπτωτική*** αποδοτικότητα του αλγορίθμου. Με άλλα λόγια, ασχολούμαστε με τον ρυθμό αύξησης του χρόνου εκτέλεσης συναρτήσει του μεγέθους της εισόδου *στην οριακή περίπτωση*, καθώς το μέγεθος της εισόδου αυξάνεται απεριόριστα. Συνήθως, ένας αλγόριθμος που είναι ασυμπτωτικά αποδοτικότερος θα αποτελεί την καλύτερη επιλογή για όλες τις εισόδους εκτός ίσως από τις πολύ μικρές.

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε διάφορες καθιερωμένες μεθόδους απλοποίησης της ασυμπτωτικής ανάλυσης αλγορίθμων. Στην επόμενη ενότητα θα ορίσουμε διάφορους τύπους «ασυμπτωτικού συμβολισμού», έναν από τους οποίους, τον συμβολισμό Θ, έχουμε ήδη συναντήσει στα προηγούμενα. Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε ορισμένες συμβολιστικές συμβάσεις οι οποίες χρησιμοποιούνται σε τακτική βάση στο βιβλίο, και τέλος θα ανακεφαλαιώσουμε τη συμπεριφορά κάποιων συναρτήσεων που εμφανίζονται συχνά στην ανάλυση αλγορίθμων.

3.1 Ασυμπτωτικός συμβολισμός

Οι διάφοροι τύποι συμβολισμού που χρησιμοποιούμε για την περιγραφή του ασυμπτωτικού χρόνου εκτέλεσης ενός αλγορίθμου ορίζονται με βάση συναρτήσεις των οποίων το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Οι συμβολισμοί αυτοί προσφέρονται για την περιγραφή της συνάρτησης του χρόνου εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης $T(n)$, ο οποίος συνήθως ορίζεται μόνο για ακέραιο μέγεθος εισόδου. Σε ορισμένες περιπτώσεις, ωστόσο, μας διευκολύνει να διευρύνουμε *καταχρηστικά* τον ασυμπτωτικό συμβολισμό με διάφορους τρόπους. Θα μπορούσε π.χ. κανείς να επεκτείνει τον συγκεκριμένο συμβολισμό στο πεδίο των πραγματικών αριθμών ή, εναλλακτικά, να τον περιορίσει σε ένα υποσύνολο των φυσικών. Θα πρέπει όμως να είμαστε βέβαιοι ότι κατανοούμε το ακριβές νόημα του συμβολισμού, ώστε ακόμα και όταν γίνεται κατάχρησή του, να μη γίνεται *εσφαλμένη* χρήση του. Στην ενότητα αυτή ορίζονται οι βασικοί ασυμπτωτικοί συμβολισμοί και περιγράφονται ορισμένες συνήθεις καταχρηστικές επεκτάσεις τους.

Ασυμπτωτικός συμβολισμός, συναρτήσεις, και χρόνοι εκτέλεσης

Θα χρησιμοποιήσουμε τον ασυμπτωτικό συμβολισμό κυρίως για να περιγράψουμε τον χρόνο εκτέλεσης αλγορίθμων, όπως κάναμε στην περίπτωση της ενθετικής ταξινόμησης, όπου γράψαμε τον χρόνο εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσής της στη μορφή $\Theta(n^2)$. Ωστόσο, ο ασυμπτωτικός συμβολισμός εφαρμόζεται στην πραγματικότητα σε συναρτήσεις. Υπενθυμίζουμε ότι εκφράσαμε τον χρόνο εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης της ενθετικής ταξινόμησης στη μορφή $an^2 + bn + c$, όπου a, b, και c κάποιες σταθερές. Λέγοντας ότι ο ο χρόνος εκτέλεσης της ενθετικής ταξινόμησης είναι σε αφηρημένο επίπεδο $\Theta(n^2)$, παραλείψαμε κάποιες λεπτομέρειες αυτής της συνάρτησης. Επειδή ο ασυμπτωτικός συμβολισμός εφαρμόζεται σε συναρτήσεις, αυτό που γράφαμε σαν $\Theta(n^2)$ ήταν η συνάρτηση $an^2 + bn + c$, που σε εκείνη την περίπτωση έτυχε να εκφράζει τον χρόνο εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης της ενθετικής ταξινόμησης.

Σε αυτό το βιβλίο, οι συναρτήσεις στις οποίες εφαρμόζουμε τον ασυμπτωτικό συμβολισμό θα εκφράζουν συνήθως τον χρόνο εκτέλεσης αλγορίθμων. Ο ασυμπτωτικός συμβολισμός, όμως, μπορεί να εφαρμοστεί σε συναρτήσεις που χαρακτηρίζουν κάποια άλλη πτυχή των αλγορίθμων (π.χ. την ποσότητα του χώρου που χρησιμοποιούν), ή ακόμα και σε συναρτήσεις που δεν έχουν καμία απολύτως σχέση με αλγορίθμους.

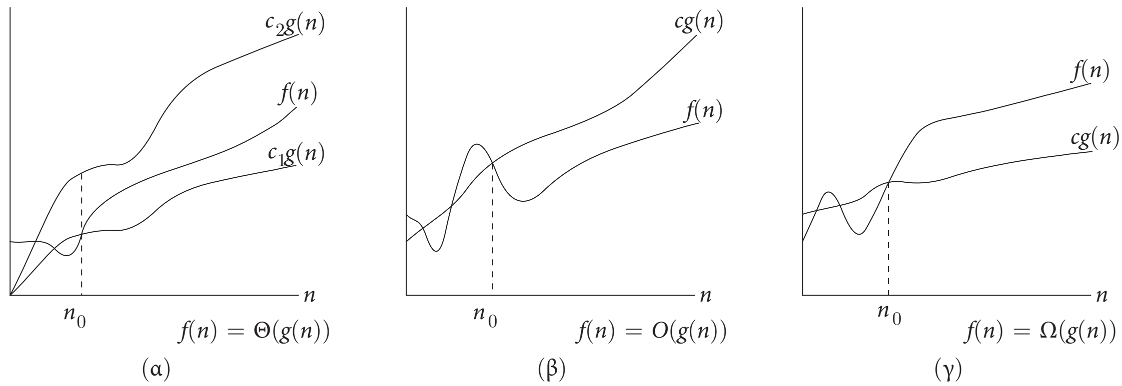
Ακόμα κι όταν χρησιμοποιούμε τον ασυμπτωτικό συμβολισμό για τον χρόνο εκτέλεσης ενός αλγορίθμου, θα πρέπει να καταλαβαίνουμε *ποιον* χρόνο εκτέλεσης εννοούμε. Μερικές φορές ενδιαφερόμαστε για τον χρόνο εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης. Συχνά όμως θέλουμε να εκφράσουμε τον χρόνο εκτέλεσης ανεξάρτητα από την είσοδο. Με άλλα λόγια, συχνά θέλουμε να κάνουμε μια καθολική εκτίμηση που να καλύπτει όλες τις εισόδους, κι όχι μόνο τη χειρότερη περίπτωση. Θα παρουσιάσουμε κατάλληλο ασυμπτωτικό συμβολισμό με τον οποίο μπορούμε να εκφράσουμε τον χρόνο εκτέλεσης ανεξάρτητα από την είσοδο.

Συμβολισμός Θ

Στο Κεφάλαιο 2, είδαμε ότι ο χρόνος εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης της ενθετικής ταξινόμησης είναι $T(n) = \Theta(n^2)$. Ας δούμε τι σημαίνει αυτός ο συμβολισμός. Για κάποια δεδομένη συνάρτηση $g(n)$, το σύμβολο $\Theta(g(n))$ δηλώνει το *σύνολο των συναρτήσεων*

$$\begin{aligned}\Theta(g(n)) = \{f(n) :\ & \text{υπάρχουν θετικές σταθερές } c_1, c_2, \text{ και } n_0 \text{ τέτοιες ώστε} \\ & 0 \le c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n) \text{ για κάθε } n \ge n_0\}\ .\end{aligned}$$ [1]

[1] Στην περιγραφή συνόλων, η «άνω και κάτω τελεία» σημαίνει «τέτοιος ώστε».



Σχήμα 3.1 Γραφική απεικόνιση των συμβολισμών Θ, O, και Ω. Σε όλες τις γραφικές παραστάσεις, η υποδεικνυόμενη τιμή του n_0 είναι η ελάχιστη δυνατή· οποιαδήποτε μεγαλύτερη τιμή είναι επίσης έγκυρη. **(α)** Ο συμβολισμός Θ φράσσει μια συνάρτηση μεταξύ δύο σταθερών πολλαπλασίων μιας άλλης. Η έκφραση $f(n) = \Theta(g(n))$ δηλώνει ότι υπάρχουν θετικές σταθερές n_0, c_1, και c_2 τέτοιες ώστε για κάθε τιμή του n από το n_0 και πέρα, η τιμή της $f(n)$ να κείται μεταξύ των $c_1g(n)$ και $c_2g(n)$ ή να συμπίπτει με ένα από αυτά τα όρια. **(β)** Ο συμβολισμός O ορίζει ένα άνω φράγμα για μια συνάρτηση με τη μορφή ενός σταθερού πολλαπλασίου μιας άλλης. Η έκφραση $f(n) = O(g(n))$ δηλώνει ότι υπάρχουν θετικές σταθερές n_0 και c τέτοιες ώστε για κάθε τιμή του n από το n_0 και πέρα, η τιμή της $f(n)$ να κείται κάτω από την τιμή της $cg(n)$ ή να συμπίπτει με αυτήν. **(γ)** Ο συμβολισμός Ω ορίζει ένα κάτω φράγμα για μια συνάρτηση με τη μορφή ενός σταθερού πολλαπλασίου μιας άλλης. Η έκφραση $f(n) = \Omega(g(n))$ δηλώνει ότι υπάρχουν θετικές σταθερές n_0 και c τέτοιες ώστε για κάθε τιμή του n από το n_0 και πέρα, η τιμή της $f(n)$ να κείται πάνω από την τιμή της $cg(n)$ ή να συμπίπτει με αυτήν.

Μια συνάρτηση $f(n)$ ανήκει στο σύνολο $\Theta(g(n))$ αν υπάρχουν θετικές σταθερές c_1 και c_2 τέτοιες ώστε η $f(n)$ να μπορεί να «στριμωχτεί» μεταξύ των $c_1g(n)$ και $c_2g(n)$, από κάποια τιμή του n και πάνω. Δεδομένου ότι το $\Theta(g(n))$ είναι ένα σύνολο, θα μπορούσαμε να δηλώσουμε ότι η $f(n)$ είναι μέλος του $\Theta(g(n))$ γράφοντας «$f(n) \in \Theta(g(n))$». Αντ' αυτού, για να περιγράψουμε τη συγκεκριμένη έννοια θα χρησιμοποιούμε συνήθως την έκφραση «$f(n) = \Theta(g(n))$». Αυτή η κατάχρηση του συμβόλου της ισότητας μπορεί να δημιουργεί κάποια σύγχυση, αλλά όπως θα δούμε πιο κάτω σε αυτήν την ενότητα έχει ορισμένα πλεονεκτήματα.

Στο Σχήμα 3.1(α) βλέπουμε μια περιγραφική απεικόνιση της σημασίας της έκφρασης $f(n) = \Theta(g(n))$ για δύο συναρτήσεις $f(n)$ και $g(n)$. Για όλες τις τιμές του n πέραν του n_0, η τιμή της $f(n)$ κείται επάνω από την $c_1g(n)$ ή συμπίπτει με αυτήν, και ταυτόχρονα κείται κάτω από την $c_2g(n)$ ή συμπίπτει με αυτήν. Με άλλα λόγια, για όλα τα $n \geq n_0$, η συνάρτηση $f(n)$ ισούται με την $g(n)$ «εντός των ορίων» ενός σταθερού παράγοντα. Λέμε ότι η $g(n)$ αποτελεί ένα ***ασυμπτωτικά αυστηρό φράγμα*** για την $f(n)$.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό του συνόλου $\Theta(g(n))$, η κάθε συνάρτηση-μέλος $f(n) \in \Theta(g(n))$ θα πρέπει να είναι ***ασυμπτωτικά μη αρνητική***, δηλαδή το $f(n)$ να έχει μη αρνητική τιμή από κάποια τιμή του n και πάνω. (Μια συνάρτηση που είναι θετική από κάποια τιμή του ορίσματός της και πάνω ονομάζεται ***ασυμπτωτικά θετική***.) Συνεπώς, και η ίδια η συνάρτηση $g(n)$ θα πρέπει να είναι ασυμπτωτικά μη αρνητική, διαφορετικά το σύνολο $\Theta(g(n))$ θα είναι κενό. Ως εκ τούτου, θα υποθέτουμε ότι όλες οι συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται στο πλαίσιο του συμβολισμού Θ είναι ασυμπτωτικά μη αρνητικές. Η παραδοχή αυτή ισχύει και για τους άλλους ασυμπτωτικούς συμβολισμούς που ορίζονται σε αυτό το κεφάλαιο.

Στο Κεφάλαιο 2, εισαγάγαμε έναν άτυπο τρόπο προσδιορισμού του «χαρακτήρα Θ» μιας συνάρτησης, απορρίπτοντας τους όρους κατώτερης τάξης και αγνοώντας τον σταθερό συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου της. Ας δούμε πώς μπορούμε να αιτιολογήσουμε εν συντομία αυτήν την άτυπη μεθοδολογία, αποδεικνύοντας μέσω του τυπικού ορισμού ότι $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$. Για τον σκοπό αυτό, θα πρέπει να βρούμε κάποιες θετικές σταθερές c_1, c_2, και n_0 τέτοιες ώστε

$$c_1 n^2 \le \frac{1}{2}n^2 - 3n \le c_2 n^2$$

για όλα τα $n \ge n_0$. Διαιρώντας όλους τους όρους με n^2, παίρνουμε τη σχέση

$$c_1 \le \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \le c_2 \ .$$

Μπορούμε να διασφαλίσουμε τη δεξιά ανισότητα για οποιαδήποτε τιμή $n \ge 1$ αν επιλέξουμε $c_2 \ge 1/2$. Ομοίως, μπορούμε να διασφαλίσουμε την αριστερή ανισότητα για οποιαδήποτε τιμή $n \ge 7$ αν επιλέξουμε $c_1 \le 1/14$. Επομένως, επιλέγοντας $c_1 = 1/14$, $c_2 = 1/2$, και $n_0 = 7$, επιβεβαιώνουμε ότι $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$. Φυσικά, υπάρχουν και άλλες επιλογές για τις σταθερές αυτές· ωστόσο, αυτό που έχει σημασία είναι ότι υπάρχουν *κάποιες* επιλογές. Σημειωτέον ότι οι σταθερές εξαρτώνται από τη μορφή της συγκεκριμένης συνάρτησης· μια διαφορετική συνάρτηση του ίδιου συνόλου $\Theta(n^2)$ θα απαιτούσε εν γένει διαφορετικές σταθερές.

Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε τον τυπικό ορισμό για να επιβεβαιώσουμε ότι $6n^3 \ne \Theta(n^2)$. Υποθέστε, αντίθετα προς το αποδεικτέο, ότι υπάρχουν c_2 και n_0 τέτοια ώστε $6n^3 \le c_2 n^2$ για όλα τα $n \ge n_0$. Στην περίπτωση αυτή, όμως, διαιρώντας με n^2 έχουμε ότι $n \le c_2/6$, πράγμα που δεν μπορεί να ισχύει για αυθαίρετα μεγάλες τιμές του n, αφού το c_2 είναι μια σταθερά.

Από διαισθητικής πλευράς, η απόρριψη των όρων χαμηλότερης τάξης μιας ασυμπτωτικά θετικής συνάρτησης για τον προσδιορισμό ενός ασυμπτωτικά αυστηρού φράγματος βασίζεται στο γεγονός ότι οι όροι αυτοί είναι επουσιώδεις για μεγάλα n. Όταν το n είναι μεγάλο, ακόμη κι ένα απειροελάχιστο κλάσμα του μεγιστοβάθμιου όρου αρκεί για να επισκιάσει πλήρως τους όρους κατώτερης τάξης. Έτσι, θέτοντας το c_1 λίγο μικρότερο από τον συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου και το c_2 λίγο μεγαλύτερο, εξασφαλίζουμε την ισχύ των ανισοτήτων στον ορισμό του συμβολισμού Θ. Ομοίως, μπορούμε να αγνοήσουμε και τον συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου, αφού η μόνη επίδραση που έχει είναι να μεταβάλλει τα c_1 και c_2 κατά έναν σταθερό πολλαπλασιαστικό παράγοντα ίσο με τον εαυτό του.

Ας θεωρήσουμε, π.χ., οποιαδήποτε τετραγωνική συνάρτηση $f(n) = an^2 + bn + c$, όπου τα a, b, και c είναι σταθερές και $a > 0$. Απορρίπτοντας τους όρους κατώτερης τάξης και αγνοώντας τη σταθερά, έχουμε $f(n) = \Theta(n^2)$. Τυπικά, για να αποδείξουμε τη σχέση αυτή, μπορούμε να επιλέξουμε $c_1 = a/4$, $c_2 = 7a/4$, και $n_0 = 2 \cdot \max(|b|/a, \sqrt{|c|/a})$. Όπως μπορείτε να επαληθεύσετε οι ίδιοι, $0 \le c_1 n^2 \le an^2 + bn + c \le c_2 n^2$ για όλα τα $n \ge n_0$. Εν γένει, για οποιοδήποτε πολυώνυμο $p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$, όπου τα a_i είναι σταθερές και $a_d > 0$, ισχύει ότι $p(n) = \Theta(n^d)$ (βλ. Πρόβλημα 3-1).

Αφού οποιαδήποτε σταθερά είναι ένα πολυώνυμο μηδενικού βαθμού, μπορούμε να εκφράσουμε οποιαδήποτε σταθερή συνάρτηση ως $\Theta(n^0)$, ή $\Theta(1)$. Ο συμβολισμός αυτός, όμως, συνιστά μια μικρή κατάχρηση, διότι η έκφραση αυτή δεν δείχνει ποια μεταβλητή τείνει προς το άπειρο.[2] Θα χρησιμοποιούμε συχνά την έκφραση $\Theta(1)$ για να δηλώσουμε είτε μια σταθερά είτε μια σταθερή συνάρτηση ως προς κάποια μεταβλητή.

Συμβολισμός O

Ο συμβολισμός Θ δηλώνει ότι μια συνάρτηση είναι ασυμπτωτικά φραγμένη από επάνω και από κάτω. Όταν έχουμε μόνο ένα ***ασυμπτωτικό άνω φράγμα***, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό O. Για μια δεδομένη συνάρτηση $g(n)$, η έκφραση $O(g(n))$ (που διαβάζεται «κεφαλαίο όμικρον του g του n» ή καμιά φορά απλώς «όμικρον του g του n») δηλώνει το σύνολο των συναρτήσεων

$$O(g(n)) = \{f(n) : \text{ υπάρχουν θετικές σταθερές } c \text{ και } n_0 \text{ τέτοιες ώστε } \\ 0 \leq f(n) \leq cg(n) \text{ για κάθε } n \geq n_0\} .$$

Ο συμβολισμός O χρησιμοποιείται για να ορίσουμε ένα άνω φράγμα για μια συνάρτηση με τη μορφή ενός σταθερού πολλαπλασίου μιας άλλης. Στο Σχήμα 3.1(β) απεικονίζεται γραφικά η σημασία της έκφρασης $f(n) = O(g(n))$. Για όλες τις τιμές του n από το n_0 και πέρα, η τιμή της $f(n)$ κείται κάτω από την $cg(n)$ ή συμπίπτει με αυτήν.

Η έκφραση $f(n) = O(g(n))$ δηλώνει ότι η συνάρτηση $f(n)$ είναι μέλος του συνόλου $O(g(n))$. Σημειώστε ότι η σχέση $f(n) = \Theta(g(n))$ συνεπάγεται ότι $f(n) = O(g(n))$, αφού ο περιορισμός που θέτει ο συμβολισμός Θ είναι ισχυρότερος από αυτόν που θέτει ο συμβολισμός O. Στη γλώσσα της θεωρίας συνόλων, $\Theta(g(n)) \subseteq O(g(n))$. Επομένως, η απόδειξή μας ότι οποιαδήποτε τετραγωνική συνάρτηση $an^2 + bn + c$, όπου $a > 0$, ανήκει στο $\Theta(n^2)$ μας εξασφαλίζει επίσης ότι οποιαδήποτε τέτοια τετραγωνική συνάρτηση ανήκει στο $O(n^2)$. Αυτό που μπορεί να φανεί κάπως πιο παράδοξο εκ πρώτης όψεως είναι ότι όταν $a > 0$ οποιαδήποτε *γραμμική* συνάρτηση $an + b$ ανήκει επίσης στο $O(n^2)$, όπως μπορεί να αποδειχθεί εύκολα αν θέσουμε $c = a + |b|$ και $n_0 = \max(1, -b/a)$.

Αν έχετε ήδη συναντήσει τον συμβολισμό O σε άλλες βιβλιογραφικές πηγές, το γεγονός ότι μπορούμε να γράφουμε, παραδείγματος χάριν, $n = O(n^2)$, πιθανόν να σας ξενίσει. Στη γενικότερη βιβλιογραφία, ο συμβολισμός O έχει χρησιμοποιηθεί άτυπα σε ορισμένες περιπτώσεις για την περιγραφή ασυμπτωτικά αυστηρών φραγμάτων, δηλαδή για τα φράγματα που εμείς έχουμε ορίσει μέσω του συμβολισμού Θ. Στο βιβλίο αυτό, όμως, όταν γράφουμε $f(n) = O(g(n))$, ισχυριζόμαστε απλώς ότι κάποιο σταθερό πολλαπλάσιο της συνάρτησης $g(n)$ αποτελεί ασυμπτωτικό άνω φράγμα για την $f(n)$, χωρίς να δηλώνουμε τίποτα σχετικά με το πόσο αυστηρό είναι αυτό το άνω φράγμα. Η διάκριση μεταξύ ασυμπτωτικού άνω φράγματος και ασυμπτωτικά αυστηρού φράγματος είναι καθιερωμένη πρακτική στη βιβλιογραφία των αλγορίθμων.

Μέσω του συμβολισμού O, συχνά μπορούμε να περιγράψουμε τον χρόνο εκτέλεσης ενός αλγορίθμου με απλή εποπτεία της γενικής δομής του αλγορίθμου. Παρα-

---

[2]Στην πραγματικότητα, το πρόβλημα είναι ότι στον συνήθη συμβολισμό των συναρτήσεων δεν γίνεται διάκριση μεταξύ συναρτήσεων και τιμών. Στον λογισμό λ, οι παράμετροι σε μια συνάρτηση ορίζονται σαφώς: η συνάρτηση n^2 θα μπορούσε να γραφεί ως $\lambda n.n^2$, ή ακόμη και $\lambda r.r^2$. Ωστόσο, η υιοθέτηση ενός αυστηρότερου συμβολισμού θα περιέπλεκε τους αλγεβρικούς χειρισμούς, και για τον λόγο αυτό επιλέγουμε να ανεχθούμε αυτήν την κατάχρηση.

δείγματος χάριν, η δομή των αλληλένθετων βρόχων στον αλγόριθμο της ενθετικής ταξινόμησης που παρατέθηκε στο Κεφάλαιο 2 δίνει αυτομάτως ένα άνω φράγμα $O(n^2)$ για τον χρόνο εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης, το οποίο προκύπτει ως εξής: το κόστος για την κάθε επανάληψη του εσωτερικού βρόχου φράσσεται εκ των άνω από το $O(1)$ (σταθερά), οι μετρητές i και j έχουν και οι δύο μέγιστη τιμή n, και ο εσωτερικός βρόχος εκτελείται το πολύ μία φορά για καθένα από τα n^2 ζεύγη τιμών των i και j.

Αφού ο συμβολισμός O ορίζει ένα άνω φράγμα, όταν φράσσουμε μέσω αυτού τον χρόνο εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης ενός αλγορίθμου, εξασφαλίζουμε ένα φράγμα του χρόνου εκτέλεσης του αλγορίθμου για οποιαδήποτε είσοδο – η καθολική εκτίμηση που αναφέραμε παραπάνω. Επομένως, το φράγμα $O(n^2)$ στον χρόνο εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης της ενθετικής ταξινόμησης ισχύει και για τον χρόνο εκτέλεσης με οποιαδήποτε είσοδο. Ωστόσο, το γεγονός ότι ο χρόνος εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης της ενθετικής ταξινόμησης έχει φράγμα $\Theta(n^2)$ δεν συνεπάγεται ότι το ίδιο φράγμα ισχύει και για τον χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου αυτού για *κάθε* είσοδο. Παραδείγματος χάριν, όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 2, όταν η ακολουθία εισόδου είναι ήδη ταξινομημένη, η ενθετική ταξινόμηση εκτελείται σε χρόνο $\Theta(n)$.

Από τεχνικής πλευράς, το να λέμε ότι ο χρόνος εκτέλεσης της ενθετικής ταξινόμησης είναι $O(n^2)$ αποτελεί κατάχρηση, αφού για δεδομένο μέγεθος εισόδου n ο χρόνος εκτέλεσης ποικίλλει ανάλογα με την εκάστοτε είσοδο. Λέγοντας ότι «ο χρόνος εκτέλεσης είναι $O(n^2)$», εννοούμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση $f(n)$ η οποία έχει χαρακτήρα $O(n^2)$, τέτοια ώστε για οποιαδήποτε τιμή του n, ανεξάρτητα από τη μορφή της κάθε συγκεκριμένης εισόδου μεγέθους n, ο χρόνος εκτέλεσης για αυτήν την είσοδο φράσσεται εκ των άνω από την τιμή $f(n)$. Ισοδύναμα, εννοούμε ότι ο χρόνος εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης είναι $O(n^2)$.

Συμβολισμός Ω

Όπως ακριβώς ο συμβολισμός O ορίζει ένα ασυμπτωτικό *άνω* φράγμα για μια συνάρτηση, ο συμβολισμός Ω ορίζει αντίστοιχα ένα ***ασυμπτωτικό κάτω φράγμα***. Για μια δεδομένη συνάρτηση $g(n)$, η έκφραση $\Omega(g(n))$ (που διαβάζεται «κεφαλαίο ωμέγα του g του n», ή καμιά φορά απλώς «ωμέγα του g του n») δηλώνει το σύνολο των συναρτήσεων

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \text{ υπάρχουν θετικές σταθερές } c \text{ και } n_0 \text{ τέτοιες ώστε } 0 \le cg(n) \le f(n) \text{ για κάθε } n \ge n_0\} .$$

Η σημασία της έκφρασης $f(n) = \Omega(g(n))$ απεικονίζεται γραφικά στο Σχήμα 3.1(γ). Για όλες τις τιμές του n από το n_0 και πέρα, η τιμή της $f(n)$ κείται επάνω από την $cg(n)$ ή συμπίπτει με αυτήν.

Με βάση τους ορισμούς του ασυμπτωτικού συμβολισμού που έχουμε ήδη αναφέρει, μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα το ακόλουθο σημαντικό θεώρημα (βλ. Άσκηση 3.1-5).

Θεώρημα 3.1
Για οποιοδήποτε ζεύγος συναρτήσεων $f(n)$ και $g(n)$, ισχύει ότι $f(n) = \Theta(g(n))$ όταν και μόνο όταν $f(n) = O(g(n))$ και $f(n) = \Omega(g(n))$. ∎

Ως παράδειγμα εφαρμογής του θεωρήματος αυτού, η προηγούμενη απόδειξή μας ότι $an^2 + bn + c = \Theta(n^2)$ για οποιεσδήποτε σταθερές a, b, και c, όπου $a > 0$, συνεπάγεται αυτομάτως ότι $an^2 + bn + c = \Omega(n^2)$ και $an^2 + bn + c = O(n^2)$. Στην πράξη, αντί να χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 3.1 για να προσδιορίσουμε ασυμπτωτικά άνω και κάτω φράγματα από ασυμπτωτικά αυστηρά φράγματα, όπως στο συγκεκριμένο παράδειγμα, συνήθως το χρησιμοποιούμε αντίστροφα, δηλαδή για να αποδείξουμε ασυμπτωτικά αυστηρά φράγματα από ασυμπτωτικά άνω και κάτω φράγματα.

Όταν λέμε ότι ο *χρόνος εκτέλεσης* (χωρίς επιπλέον προσδιορισμό) ενός αλγορίθμου είναι $\Omega(g(n))$, εννοούμε ότι *ανεξάρτητα από τη συγκεκριμένη είσοδο μεγέθους n που θα δοθεί για κάθε τιμή του n*, ο χρόνος εκτέλεσης για αυτή την είσοδο είναι τουλάχιστον ένα σταθερό πολλαπλάσιο της $g(n)$, για αρκετά μεγάλες τιμές του n. Ισοδύναμα, η ποσότητα αυτή αποτελεί κάτω φράγμα για τον χρόνο εκτέλεσης καλύτερης περίπτωσης ενός αλγορίθμου. Παραδείγματος χάριν, το γεγονός ότι ο χρόνος εκτέλεσης καλύτερης περίπτωσης της ενθετικής ταξινόμησης είναι $\Omega(n)$ συνεπάγεται ότι ο χρόνος εκτέλεσης της ενθετικής ταξινόμησης είναι $\Omega(n)$.

Άρα, ο χρόνος εκτέλεσης της ενθετικής ταξινόμησης ανήκει τόσο στο $\Omega(n)$ όσο και στο $O(n^2)$, αφού βρίσκεται κάπου στο ενδιάμεσο μεταξύ μιας γραμμικής και μιας τετραγωνικής συνάρτησης του n. Επιπλέον, τα φράγματα αυτά είναι ασυμπτωτικά τα αυστηρότερα δυνατά: παραδείγματος χάριν, ο χρόνος εκτέλεσης της ενθετικής ταξινόμησης δεν είναι $\Omega(n^2)$, αφού υπάρχει κάποια είσοδος για την οποία η ταξινόμηση αυτή εκτελείται σε χρόνο $\Theta(n)$ (λ.χ., όταν η ακολουθία εισόδου είναι ήδη ταξινομημένη). Ωστόσο, δεν αποτελεί αντίφαση να πούμε ότι ο χρόνος εκτέλεσης *χειρότερης περίπτωσης* της ενθετικής ταξινόμησης είναι $\Omega(n^2)$, αφού υπάρχει κάποια είσοδος για την οποία ο αλγόριθμος εκτελείται σε χρόνο $\Omega(n^2)$.

Ασυμπτωτικός συμβολισμός σε ισότητες και ανισότητες

Έχουμε ήδη δει πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο ασυμπτωτικός συμβολισμός στο πλαίσιο μαθηματικών σχέσεων. Όταν εισαγάγαμε τον συμβολισμό O, παραδείγματος χάριν, αναφέραμε τη σχέση «$n = O(n^2)$». Θα μπορούσαμε επίσης να γράψουμε τη σχέση $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \Theta(n)$. Πώς ερμηνεύονται τέτοιου είδους σχέσεις;

Σύμφωνα με προηγούμενο ορισμό, όταν στο δεξιό μέλος μιας ισότητας (ή ανισότητας) εμφανίζεται μόνο μια έκφραση σε ασυμπτωτικό συμβολισμό (δηλαδή η έκφραση αυτή δεν αποτελεί τμήμα ενός μεγαλύτερου τύπου), όπως π.χ. στη σχέση $n = O(n^2)$, τότε το σύμβολο της ισότητας σημαίνει την ιδιότητα του μέλους ενός συνόλου: $n \in O(n^2)$. Εν γένει, ωστόσο, όταν σε μια σχέση εμφανίζεται ο ασυμπτωτικός συμβολισμός, τον ερμηνεύουμε ως μια έκφραση που συμβολίζει κάποια ανώνυμη συνάρτηση η οποία δεν είναι απαραίτητο να κατονομαστεί. Παραδείγματος χάριν, η σχέση $2n^2+3n+1 = 2n^2+\Theta(n)$ σημαίνει ότι $2n^2+3n+1 = 2n^2+f(n)$, όπου η $f(n)$ είναι κάποια συνάρτηση που ανήκει στο σύνολο $\Theta(n)$. Στην προκειμένη περίπτωση, θεωρούμε ότι $f(n) = 3n + 1$, δηλαδή η $f(n)$ ανήκει πράγματι στο $\Theta(n)$.

Αυτός ο τρόπος χρήσης του ασυμπτωτικού συμβολισμού μάς επιτρέπει να εξαλείψουμε επουσιώδεις λεπτομέρειες και πεπλεγμένες εκφράσεις από μια εξίσωση. Παραδείγματος χάριν, στο Κεφάλαιο 2 εκφράσαμε τον χρόνο εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης της συγχωνευτικής ταξινόμησης μέσω της αναδρομικής σχέσης

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n) .$$

Αν ενδιαφερόμαστε μόνο για την ασυμπτωτική συμπεριφορά του $T(n)$, δεν υπάρχει κανένας λόγος να προσδιορίσουμε επακριβώς όλους τους όρους κατώτερης τάξης· εννοείται ότι εμπεριέχονται όλοι στην ανώνυμη συνάρτηση η οποία δηλώνεται με τον όρο $\Theta(n)$.

Το πλήθος των ανώνυμων συναρτήσεων σε μια έκφραση θεωρείται ίσο με το πλήθος των εμφανίσεων του ασυμπτωτικού συμβολισμού. Παραδείγματος χάριν, στην έκφραση

$$\sum_{i=1}^{n} O(i) \ ,$$

υπάρχει μόνο μία ανώνυμη συνάρτηση (η οποία είναι συνάρτηση του i). Επομένως, η έκφραση αυτή *δεν* ταυτίζεται με την $O(1) + O(2) + \cdots + O(n)$, η οποία στην πραγματικότητα δεν έχει σαφή ερμηνεία.

Σε ορισμένες περιπτώσεις, εμφανίζεται στο αριστερό μέλος μιας εξίσωσης μια έκφραση σε ασυμπτωτικό συμβολισμό, π.χ.

$$2n^2 + \Theta(n) = \Theta(n^2) \ .$$

Τέτοιου είδους εξισώσεις ερμηνεύονται με βάση τον εξής κανόνα: *Όποια επιλογή και αν κάνουμε για τις ανώνυμες συναρτήσεις του αριστερού μέλους, μπορούμε να επιλέξουμε τις ανώνυμες συναρτήσεις του δεξιού μέλους έτσι ώστε η εξίσωση να ισχύει.* Επομένως, το νόημα της παραπάνω εξίσωσης είναι ότι για *οποιαδήποτε* συνάρτηση $f(n) \in \Theta(n)$, υπάρχει *κάποια* συνάρτηση $g(n) \in \Theta(n^2)$ τέτοια ώστε $2n^2 + f(n) = g(n)$, για όλα τα n. Με άλλα λόγια, το δεξιό μέλος της εξίσωσης αντιπροσωπεύει ένα πιο «αδρό» επίπεδο λεπτομέρειας απ' ό,τι το αριστερό.

Είναι δυνατόν επίσης να έχουμε αλυσιδωτή παράθεση πολλών τέτοιων σχέσεων:

$$\begin{aligned} 2n^2 + 3n + 1 &= 2n^2 + \Theta(n) \\ &= \Theta(n^2) \ . \end{aligned}$$

Καθεμία από τις εξισώσεις αυτές μπορεί να ερμηνευθεί ανεξάρτητα με βάση τους παραπάνω κανόνες. Η πρώτη εξίσωση σημαίνει ότι υπάρχει *κάποια* συνάρτηση $f(n) \in \Theta(n)$ τέτοια ώστε $2n^2+3n+1 = 2n^2+f(n)$ για κάθε n. Η δεύτερη σημαίνει ότι για *οποιαδήποτε* συνάρτηση $g(n) \in \Theta(n)$ (όπως η $f(n)$ που μόλις αναφέραμε), υπάρχει *κάποια* συνάρτηση $h(n) \in \Theta(n^2)$ τέτοια ώστε $2n^2 + g(n) = h(n)$ για κάθε n. Σημειώστε ότι η ερμηνεία αυτή συνεπάγεται ότι $2n^2+3n+1 = \Theta(n^2)$, η οποία δεν είναι παρά η εξίσωση που συνδέει τα δύο «άκρα» της αλυσίδας.

Συμβολισμός *o*

Στον συμβολισμό O, δεν προσδιορίζεται αν το δηλούμενο ασυμπτωτικό άνω φράγμα είναι ασυμπτωτικά αυστηρό η όχι. Το φράγμα $2n^2 = O(n^2)$ είναι ασυμπτωτικά αυστηρό, ενώ το φράγμα $2n = O(n^2)$ όχι. Για να δηλώσουμε ένα ασυμπτωτικά μη αυστηρό άνω φράγμα, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό o. Το $o(g(n))$ (που διαβάζεται «πεζό όμικρον του g του n») ορίζεται τυπικά ως το σύνολο

$$o(g(n)) = \{f(n) : \text{ για οποιαδήποτε θετική σταθερά } c > 0\text{, υπάρχει σταθερά } n_0 > 0 \text{ τέτοια ώστε } 0 \le f(n) < cg(n) \text{ για κάθε } n \ge n_0\} \ .$$

Παραδείγματος χάριν, $2n = o(n^2)$, αλλά $2n^2 \neq o(n^2)$.

Οι ορισμοί των συμβολισμών O και o είναι παρόμοιοι. Η βασική διαφορά τους είναι ότι στη σχέση $f(n) = O(g(n))$ το φράγμα $0 \leq f(n) \leq cg(n)$ ισχύει για *κάποια* σταθερά $c > 0$, ενώ στην $f(n) = o(g(n))$ το φράγμα $0 \leq f(n) < cg(n)$ ισχύει για *όλες* τις σταθερές $c > 0$. Σε περιγραφικό επίπεδο, στον συμβολισμό o, η συνάρτηση $f(n)$ γίνεται αμελητέα σε σχέση με την $g(n)$ καθώς το n τείνει προς το άπειρο· δηλαδή,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \,. \tag{3.1}$$

Ορισμένοι συγγραφείς ορίζουν τον συμβολισμό o με βάση αυτό το όριο· ο δικός μας ορισμός εισάγει τον επιπλέον περιορισμό της ασυμπτωτικής μη αρνητικότητας της ανώνυμης συνάρτησης.

Συμβολισμός ω

Κατ' αναλογίαν, ο συμβολισμός ω συνδέεται με τον συμβολισμό Ω με την ίδια σχέση η οποία συνδέει τον συμβολισμό o με τον συμβολισμό O. Με άλλα λόγια, ο συμβολισμός ω δηλώνει ένα κάτω φράγμα το οποίο δεν είναι ασυμπτωτικά αυστηρό. Ένας δυνατός ορισμός του είναι ο εξής

$$f(n) \in \omega(g(n)) \text{ όταν και μόνο όταν } g(n) \in o(f(n)) \,.$$

Ωστόσο, το $\omega(g(n))$ (που διαβάζεται «πεζό ωμέγα του g του n») ορίζεται τυπικά ως το σύνολο

$$\begin{aligned}\omega(g(n)) = \{f(n) :\ & \text{για οποιαδήποτε θετική σταθερά } c > 0, \text{ υπάρχει σταθερά} \\ & n_0 > 0 \text{ τέτοια ώστε } 0 \leq cg(n) < f(n) \text{ για κάθε } n \geq n_0\} \,.\end{aligned}$$

Π.χ., $n^2/2 = \omega(n)$, αλλά $n^2/2 \neq \omega(n^2)$. Η σχέση $f(n) = \omega(g(n))$ συνεπάγεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \,,$$

εάν υπάρχει το όριο. Δηλαδή, η $f(n)$ γίνεται αυθαίρετα μεγάλη σε σχέση με την $g(n)$ καθώς το n τείνει προς το άπειρο.

Σύγκριση συναρτήσεων

Πολλές από τις ιδιότητες που ισχύουν για τις σχέσεις μεταξύ πραγματικών αριθμών ισχύουν και για τις ασυμπτωτικές συγκρίσεις. Στα επόμενα, υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $f(n)$ και $g(n)$ είναι ασυμπτωτικά θετικές.

Μεταβατικότητα:

$$\begin{array}{llll}
f(n) = \Theta(g(n)) & \text{και } g(n) = \Theta(h(n)) & \text{συνεπάγεται} & f(n) = \Theta(h(n)) \,, \\
f(n) = O(g(n)) & \text{και } g(n) = O(h(n)) & \text{συνεπάγεται} & f(n) = O(h(n)) \,, \\
f(n) = \Omega(g(n)) & \text{και } g(n) = \Omega(h(n)) & \text{συνεπάγεται} & f(n) = \Omega(h(n)) \,, \\
f(n) = o(g(n)) & \text{και } g(n) = o(h(n)) & \text{συνεπάγεται} & f(n) = o(h(n)) \,, \\
f(n) = \omega(g(n)) & \text{και } g(n) = \omega(h(n)) & \text{συνεπάγεται} & f(n) = \omega(h(n)) \,.
\end{array}$$

Αυτοπάθεια:

$$\begin{aligned} f(n) &= \Theta(f(n)) \,, \\ f(n) &= O(f(n)) \,, \\ f(n) &= \Omega(f(n)) \,. \end{aligned}$$

Συμμετρία:

$$f(n) = \Theta(g(n)) \text{ όταν και μόνο όταν } g(n) = \Theta(f(n)) \,.$$

Αναστροφική συμμετρία:

$$\begin{aligned} f(n) &= O(g(n)) \quad \text{όταν και μόνο όταν} \quad g(n) = \Omega(f(n)) \,, \\ f(n) &= o(g(n)) \quad \text{όταν και μόνο όταν} \quad g(n) = \omega(f(n)) \,. \end{aligned}$$

Αυτές οι ιδιότητες του ασυμπτωτικού συμβολισμού μάς επιτρέπουν να συναγάγουμε κάποια αντιστοιχία μεταξύ της ασυμπτωτικής σύγκρισης δύο συναρτήσεων f και g και της σύγκρισης δύο πραγματικών αριθμών a και b:

η $f(n) = O(g(n))$ αντιστοιχεί στην $a \le b$,
η $f(n) = \Omega(g(n))$ αντιστοιχεί στην $a \ge b$,
η $f(n) = \Theta(g(n))$ αντιστοιχεί στην $a = b$,
η $f(n) = o(g(n))$ αντιστοιχεί στην $a < b$,
η $f(n) = \omega(g(n))$ αντιστοιχεί στην $a > b$.

Όταν $f(n) = o(g(n))$ λέμε ότι η $f(n)$ είναι ***ασυμπτωτικά μικρότερη*** της $g(n)$, ενώ όταν $f(n) = \omega(g(n))$ λέμε ότι η $f(n)$ είναι ***ασυμπτωτικά μεγαλύτερη*** της $g(n)$.

Ωστόσο, υπάρχει μια ιδιότητα των πραγματικών αριθμών η οποία δεν μεταφέρεται στον ασυμπτωτικό συμβολισμό:

Τριχοτομική ιδιότητα: Για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών a και b, ισχύει μία και μόνο μία από τις ακόλουθες σχέσεις: $a < b$, $a = b$, ή $a > b$.

Παρ' όλο που όλοι οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να συγκριθούν ανά δύο μεταξύ τους, οι συναρτήσεις δεν είναι εν γένει ασυμπτωτικά συγκρίσιμες ανά δύο. Με άλλα λόγια, μεταξύ δύο συναρτήσεων $f(n)$ και $g(n)$, είναι δυνατόν να μην ισχύει ούτε η σχέση $f(n) = O(g(n))$ ούτε η σχέση $f(n) = \Omega(g(n))$. Παραδείγματος χάριν, δεν μπορούμε να συγκρίνουμε τις συναρτήσεις n και $n^{1+\sin n}$ στο πλαίσιο του ασυμπτωτικού συμβολισμού, αφού η τιμή του εκθετικού στην έκφραση $n^{1+\sin n}$ κυμαίνεται μεταξύ 0 και 2, λαμβάνοντας όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

Ασκήσεις

3.1-1

Έστω $f(n)$ και $g(n)$ τυχούσες ασυμπτωτικά μη αρνητικές συναρτήσεις. Δείξτε ότι $\max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$ χρησιμοποιώντας τον βασικό ορισμό του συμβολισμού Θ.

3.1-2

Δείξτε ότι για οποιεσδήποτε πραγματικές σταθερές a και b, όπου $b > 0$, ισχύει

$$(n + a)^b = \Theta(n^b) \,. \tag{3.2}$$

3.1-3
Εξηγήστε γιατί η πρόταση «Ο χρόνος εκτέλεσης ενός αλγορίθμου A είναι τουλάχιστον $O(n^2)$» δεν έχει νόημα.

3.1-4
Ισχύει ότι $2^{n+1} = O(2^n)$; Ισχύει ότι $2^{2n} = O(2^n)$;

3.1-5
Αποδείξτε το Θεώρημα 3.1.

3.1-6
Αποδείξτε ότι ο χρόνος εκτέλεσης ενός αλγορίθμου είναι $\Theta(g(n))$ όταν και μόνο όταν ο χρόνος εκτέλεσής του στη χειρότερη περίπτωση είναι $O(g(n))$ και στην καλύτερη περίπτωση είναι $\Omega(g(n))$.

3.1-7
Αποδείξτε ότι το σύνολο $o(g(n)) \cap \omega(g(n))$ είναι το κενό σύνολο.

3.1-8
Ο ασυμπτωτικός συμβολισμός μπορεί να επεκταθεί και σε συναρτήσεις με δύο μεταβλητές n και m οι οποίες μπορούν να λάβουν αυθαίρετα μεγάλες τιμές, ανεξάρτητα η μία από την άλλη. Για μια δεδομένη συνάρτηση $g(n,m)$, η έκφραση $O(g(n,m))$ δηλώνει το σύνολο των συναρτήσεων

$$O(g(n,m)) = \{f(n,m) : \begin{array}{l}\text{υπάρχουν θετικές σταθερές } c,\, n_0, \text{ και } m_0 \\ \text{τέτοιες ώστε } 0 \le f(n,m) \le cg(n,m) \\ \text{για κάθε } n \ge n_0 \text{ ή } m \ge m_0\}\ .\end{array}$$

Δώστε αντίστοιχους ορισμούς για τις εκφράσεις $\Omega(g(n,m))$ και $\Theta(g(n,m))$.

3.2 Καθιερωμένοι συμβολισμοί και συνήθεις συναρτήσεις

Στην ενότητα αυτή, θα περιγράψουμε συνοπτικά κάποιες καθιερωμένες μαθηματικές συναρτήσεις και ορισμένους πάγιους συμβολισμούς και θα μελετήσουμε τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ τους. Η μελέτη αυτή περιλαμβάνει και ορισμένα παραδείγματα της χρήσης του ασυμπτωτικού συμβολισμού.

Μονοτονία

Μια συνάρτηση $f(n)$ λέγεται ***μονότονα αύξουσα*** αν για κάθε $m \le n$ ισχύει ότι $f(m) \le f(n)$. Αντίστοιχα, λέγεται ***μονότονα φθίνουσα*** αν για κάθε $m \le n$ ισχύει ότι $f(m) \ge f(n)$. Μια συνάρτηση $f(n)$ λέγεται ***γνησίως αύξουσα*** αν για κάθε $m < n$ ισχύει ότι $f(m) < f(n)$ και ***γνησίως φθίνουσα*** αν για κάθε $m < n$ ισχύει ότι $f(m) > f(n)$.

Κατώφλι και ανώφλι

Για κάθε πραγματικό αριθμό x, το σύμβολο $\lfloor x \rfloor$ (που διαβάζεται «κατώφλι του x») δηλώνει τον μεγαλύτερο ακέραιο που είναι μικρότερος ή ίσος του x και το σύμβολο

$\lceil x \rceil$ (που διαβάζεται «ανώφλι του x») δηλώνει τον μικρότερο ακέραιο που είναι μεγαλύτερος ή ίσος του x. Για κάθε πραγματικό αριθμό x,

$$x - 1 \ < \ \lfloor x \rfloor \ \leq \ x \ \leq \ \lceil x \rceil \ < \ x + 1 \, . \tag{3.3}$$

Για κάθε ακέραιο n,

$$\lceil n/2 \rceil + \lfloor n/2 \rfloor = n \, ,$$

ενώ για κάθε πραγματικό αριθμό $x \geq 0$ και για οποιουσδήποτε ακεραίους $a, b > 0$,

$$\left\lceil \frac{\lceil x/a \rceil}{b} \right\rceil \ = \ \left\lceil \frac{x}{ab} \right\rceil \, , \tag{3.4}$$

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x/a \rfloor}{b} \right\rfloor \ = \ \left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor \, , \tag{3.5}$$

$$\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil \ \leq \ \frac{a + (b-1)}{b} \, , \tag{3.6}$$

$$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \ \geq \ \frac{a - (b-1)}{b} \, . \tag{3.7}$$

Η συνάρτηση κατωφλίου $f(x) = \lfloor x \rfloor$ είναι μονότονα αύξουσα, όπως και η συνάρτηση ανωφλίου $f(x) = \lceil x \rceil$.

Υπολοιπική αριθμητική

Για οποιονδήποτε ακέραιο a και για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο n, η έκφραση $a \bmod n$ αντιπροσωπεύει το ***υπόλοιπο*** της διαίρεσης a/n:

$$a \bmod n = a - \lfloor a/n \rfloor \, n, \tag{3.8}$$

απ' όπου έπεται ότι

$$0 \leq a \bmod n < n \, . \tag{3.9}$$

Δεδομένου ότι η έννοια του υπολοίπου της διαίρεσης ενός ακεραίου με έναν άλλον είναι μονοσήμαντα ορισμένη, είναι σκόπιμο να εισαγάγουμε για μελλοντική χρήση ειδικό συμβολισμό που να δηλώνει την ισότητα υπολοίπων. Αν $(a \bmod n) = (b \bmod n)$, γράφουμε $a \equiv b \pmod{n}$ και λέμε ότι ο ακέραιος a είναι ***ισοδύναμος*** του b, modulo n. Με άλλα λόγια, $a \equiv b \pmod{n}$ αν οι ακέραιοι a και b αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρούνται με το n. Ισοδύναμα, $a \equiv b \pmod{n}$ όταν και μόνο όταν το $b - a$ διαιρείται με το n. Όταν ο ακέραιος a δεν είναι ισοδύναμος του b, modulo n, γράφουμε $a \not\equiv b \pmod{n}$.

Πολυώνυμα

Για κάποιον δεδομένο μη αρνητικό ακέραιο d, μια συνάρτηση $p(n)$ της μορφής

$$p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i \, ,$$

είναι ένα ***πολυώνυμο του n βαθμού d***, όπου οι σταθερές $a_0, a_1, \ldots, a_d$ ονομάζονται ***συντελεστές*** του πολυωνύμου και $a_d \neq 0$. Ένα πολυώνυμο είναι ασυμπτωτικά θετικό όταν και μόνο όταν $a_d > 0$. Για ένα ασυμπτωτικά θετικό πολυώνυμο $p(n)$

βαθμού d, ισχύει ότι $p(n) = \Theta(n^d)$. Για οποιαδήποτε πραγματική σταθερά $a \geq 0$, η συνάρτηση n^a είναι μονότονα αύξουσα, και για οποιαδήποτε πραγματική σταθερά $a \leq 0$, η συνάρτηση n^a είναι μονότονα φθίνουσα. Όταν $f(n) = O(n^k)$ για κάποια σταθερά k, λέμε ότι η συνάρτηση $f(n)$ είναι ***πολυωνυμικά φραγμένη***.

Εκθετικά

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $a > 0$, m, και n, ισχύουν οι ακόλουθες ταυτότητες:

$$\begin{aligned}
a^0 &= 1 , \\
a^1 &= a , \\
a^{-1} &= 1/a , \\
(a^m)^n &= a^{mn} , \\
(a^m)^n &= (a^n)^m , \\
a^m a^n &= a^{m+n} .
\end{aligned}$$

Για κάθε n και $a \geq 1$, η συνάρτηση a^n είναι μονότονα αύξουσα ως προς n. Όπου απαιτείται, θα θεωρούμε ότι $0^0 = 1$.

Οι αυξητικοί χαρακτήρες των πολυωνύμων και των εκθετικών μπορούν να συσχετιστούν μεταξύ τους με βάση την ακόλουθη ιδιότητα. Για οποιεσδήποτε πραγματικές σταθερές a και b, όπου $a > 1$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^b}{a^n} = 0 , \tag{3.10}$$

απ' όπου έπεται ότι

$$n^b = o(a^n) .$$

Επομένως, οποιαδήποτε εκθετική συνάρτηση με βάση μεγαλύτερη του 1 αυξάνεται ταχύτερα από οποιαδήποτε πολυωνυμική συνάρτηση.

Αν συμβολίσουμε ως συνήθως τη βάση $2{,}71828\ldots$ των φυσικών (νεπέρειων) λογαρίθμων με e, έχουμε ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} , \tag{3.11}$$

όπου το σύμβολο «!» αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση του παραγοντικού, η οποία ορίζεται παρακάτω σε αυτήν την ενότητα. Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x, ισχύει η ανισότητα

$$e^x \geq 1 + x , \tag{3.12}$$

όπου η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = 0$. Όταν $|x| \leq 1$, ισχύει η διπλή ανισότητα

$$1 + x \leq e^x \leq 1 + x + x^2 . \tag{3.13}$$

Όταν $x \to 0$, το e^x προσεγγίζεται με αρκετή ακρίβεια από το $1 + x$:

$$e^x = 1 + x + \Theta(x^2) .$$

(Στην ισότητα αυτή, ο ασυμπτωτικός συμβολισμός αναφέρεται στη συμπεριφορά του e^x στο όριο $x \to 0$, και όχι στο $x \to \infty$.) Για οποιονδήποτε αριθμό x, ισχύει

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x . \tag{3.14}$$

Λογάριθμοι

Όσον αφορά τον συμβολισμό των λογαρίθμων, θα ακολουθήσουμε τις εξής συμβάσεις:

$$\begin{aligned}
\lg n &= \log_2 n && \text{(δυαδικός λογάριθμος)} \ , \\
\ln n &= \log_e n && \text{(φυσικός λογάριθμος)} \ , \\
\lg^k n &= (\lg n)^k && \text{(ύψωση σε δύναμη)} \ , \\
\lg\lg n &= \lg(\lg n) && \text{(σύνθεση)} \ .
\end{aligned}$$

Μια άλλη σημαντική σύμβαση που θα ακολουθήσουμε είναι ότι *οι λογαριθμικές συναρτήσεις έχουν ως όρισμα μόνο τον αμέσως επόμενο όρο στην εκάστοτε μαθηματική έκφραση*, και επομένως η έκφραση $\lg n + k$ σημαίνει $(\lg n) + k$ και όχι $\lg(n+k)$. Για κάθε σταθερή βάση $b > 1$, η συνάρτηση $\log_b n$ είναι γνησίως αύξουσα για $n > 0$.

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, και n,

$$\begin{aligned}
a &= b^{\log_b a} \ , \\
\log_c(ab) &= \log_c a + \log_c b \ , \\
\log_b a^n &= n \log_b a \ , \\
\log_b a &= \frac{\log_c a}{\log_c b} \ , && (3.15) \\
\log_b(1/a) &= -\log_b a \ , \\
\log_b a &= \frac{1}{\log_a b} \ , \\
a^{\log_b c} &= c^{\log_b a} \ , && (3.16)
\end{aligned}$$

όπου σε όλες τις παραπάνω ισότητες οι βάσεις των λογαρίθμων είναι διάφορες του 1.

Σύμφωνα με την ισότητα (3.15), όταν η βάση ενός λογαρίθμου μεταβάλλεται από κάποια σταθερά σε κάποια άλλη, η τιμή του λογαρίθμου μεταβάλλεται μόνο κατά έναν σταθερό πολλαπλασιαστικό παράγοντα, και για τον λόγο αυτό στις περιπτώσεις όπου δεν μας ενδιαφέρουν οι σταθεροί παράγοντες, όπως π.χ. στον συμβολισμό O, θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο «$\lg n$». Στην επιστήμη των υπολογιστών, η πιο «φυσιολογική» βάση για λογαρίθμους είναι το 2, διότι πάρα πολλοί αλγόριθμοι και δομές δεδομένων περιλαμβάνουν διαίρεση ενός προβλήματος σε δύο μέρη.

Για $|x| < 1$ ο λογάριθμος $\ln(1+x)$ αναπτύσσεται στην παρακάτω σειρά:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots \ .$$

Ισχύουν επίσης οι ακόλουθες ανισότητες για $x > -1$:

$$\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x \ , \qquad (3.17)$$

όπου η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.

Αν για μια συνάρτηση $f(n)$ ισχύει $f(n) = O(\lg^k n)$ για κάποια σταθερά k, λέμε ότι η $f(n)$ είναι ***πολυλογαριθμικά φραγμένη***. Θέτοντας όπου n και a τα $\lg n$ και 2^a στη σχέση (3.10), μπορούμε να συναγάγουμε μια σχέση μεταξύ των ρυθμών αύξησης των πολυωνυμικών και των πολυλογαριθμικών συναρτήσεων:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lg^b n}{(2^a)^{\lg n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lg^b n}{n^a} = 0 \,.$$

Από το όριο αυτό, συμπεραίνουμε ότι

$$\lg^b n = o(n^a)$$

για οποιαδήποτε σταθερά $a > 0$. Συνεπώς, οποιοδήποτε θετική πολυωνυμική συνάρτηση αυξάνεται ταχύτερα από οποιαδήποτε πολυλογαριθμική.

Παραγοντικά

Το σύμβολο $n!$ (που διαβάζεται «n παραγοντικό») ορίζεται για ακέραιους αριθμούς $n \geq 0$ ως εξής

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{εάν } n = 0 \,, \\ n \cdot (n-1)! & \text{εάν } n > 0 \,. \end{cases}$$

Επομένως, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Δεδομένου ότι καθένας από τους n όρους στο παραγοντικό γινόμενο είναι μικρότερος ή ίσος του n, ένα ασθενές άνω φράγμα της συνάρτησης παραγοντικού είναι $n! \leq n^n$. Η ***προσέγγιση του Stirling***,

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right) \,, \tag{3.18}$$

όπου e είναι η βάση των φυσικών λογαρίθμων, μας δίνει αφ' ενός ένα αυστηρότερο άνω φράγμα, και αφ' ετέρου ένα κάτω φράγμα. Όπως σας ζητείται να αποδείξετε στην Άσκηση 3.2-3,

$$\begin{aligned} n! &= o(n^n) \,, \\ n! &= \omega(2^n) \,, \\ \lg(n!) &= \Theta(n \lg n) \,, \end{aligned} \tag{3.19}$$

όπου η σχέση (3.19) αποδεικνύεται με τη βοήθεια της προσέγγισης του Stirling. Για όλα τα $n \geq 1$ ισχύει επίσης η ακόλουθη ισότητα:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\alpha_n} \tag{3.20}$$

όπου

$$\frac{1}{12n+1} < \alpha_n < \frac{1}{12n} \,. \tag{3.21}$$

Επαναληπτική εφαρμογή συναρτήσεων

Η έκφραση $f^{(i)}(n)$ δηλώνει την επαναληπτική εφαρμογή της συνάρτησης $f(n)$ i φορές σε μια αρχική τιμή του n. Για έναν αυστηρότερο ορισμό, έστω $f(n)$ μια συνάρτηση επί των πραγματικών αριθμών. Για μη αρνητικούς ακέραιους αριθμούς i, ορίζουμε αναδρομικά

$$f^{(i)}(n) = \begin{cases} n & \text{εάν } i = 0 \,, \\ f(f^{(i-1)}(n)) & \text{εάν } i > 0 \,. \end{cases}$$

Παραδείγματος χάριν, εάν $f(n) = 2n$, τότε $f^{(i)}(n) = 2^i n$.

Η επανειλημμένη συνάρτηση λογαρίθμου

Η έκφραση $\lg^* n$ (που διαβάζεται «λογάριθμος αστερίσκος του n») δηλώνει τον επανειλημμένο λογάριθμο, ο οποίος ορίζεται ως εξής. Έστω $\lg^{(i)} n$ ο επαναληπτικός λογάριθμος, όπως ορίζεται με βάση τη σχέση της προηγούμενης υποενότητας για $f(n) = \lg n$. Επειδή ο λογάριθμος ενός μη θετικού αριθμού δεν ορίζεται, ο $\lg^{(i)} n$ ορίζεται μόνο όταν $\lg^{(i-1)} n > 0$. Ο $\lg^{(i)} n$ (που δηλώνει τη συνάρτηση του λογαρίθμου εφαρμοζόμενη i φορές διαδοχικά, με αρχικό όρισμα n) δεν θα πρέπει να συγχέεται με τον $\lg^i n$ (τον λογάριθμο του n υψωμένο στην i-οστή δύναμη). Η επανειλημμένη συνάρτηση λογαρίθμου ορίζεται ως εξής:

$$\lg^* n = \min \{i \geq 0 : \lg^{(i)} n \leq 1\} \ .$$

Η συνάρτηση αυτή αυξάνεται με *πολύ* αργό ρυθμό:

$$\begin{aligned}
\lg^* 2 &= 1 \,, \\
\lg^* 4 &= 2 \,, \\
\lg^* 16 &= 3 \,, \\
\lg^* 65536 &= 4 \,, \\
\lg^* (2^{65536}) &= 5 \,.
\end{aligned}$$

Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι ο αριθμός των ατόμων στο παρατηρήσιμο σύμπαν εκτιμάται ότι είναι της τάξης του 10^{80}, δηλαδή πολύ μικρότερος από το 2^{65536}. Επομένως, είναι σπάνιο να συναντήσει κανείς είσοδο προγράμματος με μέγεθος n τέτοιο ώστε $\lg^* n > 5$.

Αριθμοί Fibonacci

Οι ***αριθμοί Fibonacci*** ορίζονται μέσω της ακόλουθης αναδρομικής σχέσης:

$$\begin{aligned}
F_0 &= 0 \,, \\
F_1 &= 1 \,, \\
F_i &= F_{i-1} + F_{i-2} \qquad \text{για } i \geq 2 \,.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Κάθε αριθμός Fibonacci, δηλαδή, είναι το άθροισμα των δύο προηγουμένων, οπότε προκύπτει η εξής ακολουθία:

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \ldots\ .$$

Οι αριθμοί Fibonacci συνδέονται με τον ***λόγο της χρυσής τομής*** ϕ και τον συζυγή του, $\widehat{\phi}$, που είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 = x + 1 \tag{3.23}$$

και δίνονται από τους παρακάτω τύπους (βλ. Άσκηση 3.2-6):

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\
&= 1{,}61803\ldots \ , \\
\widehat{\phi} &= \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\
&= -0{,}61803\ldots \ .
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Συγκεκριμένα, έχουμε τη σχέση

$$F_i = \frac{\phi^i - \widehat{\phi}^i}{\sqrt{5}} \,,$$

η οποία μπορεί να αποδειχθεί με επαγωγή (Άσκηση 3.2-7). Δεδομένου ότι $\left|\widehat{\phi}\right| < 1$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{\left|\widehat{\phi}^i\right|}{\sqrt{5}} &< \frac{1}{\sqrt{5}} \\ &< \frac{1}{2} \,, \end{aligned}$$

απ' όπου συνεπάγεται ότι

$$F_i = \left\lfloor \frac{\phi^i}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor \,, \tag{3.25}$$

δηλαδή ο i-οστός αριθμός Fibonacci, F_i, ισούται με το $\phi^i/\sqrt{5}$ στρογγυλεμένο στον πλησιέστερο ακέραιο. Συνεπώς, οι αριθμοί Fibonacci αυξάνονται εκθετικά.

Ασκήσεις

3.2-1
Δείξτε ότι αν οι $f(n)$ και $g(n)$ είναι μονότονα αύξουσες συναρτήσεις, τότε το ίδιο ισχύει και για τις $f(n)+g(n)$ και $f(g(n))$, ενώ αν επιπλέον είναι μη αρνητικές, τότε η $f(n) \cdot g(n)$ είναι μονότονα αύξουσα.

3.2-2
Αποδείξτε την ισότητα (3.16).

3.2-3
Αποδείξτε τη σχέση (3.19). Αποδείξτε επίσης ότι $n! = \omega(2^n)$ και ότι $n! = o(n^n)$.

3.2-4 $\star$
Η συνάρτηση $\lceil \lg n \rceil!$ είναι πολυωνυμικά φραγμένη; Το ίδιο ερώτημα για τη συνάρτηση $\lceil \lg \lg n \rceil!$.

3.2-5 $\star$
Ποια από τις συναρτήσεις $\lg(\lg^* n)$ και $\lg^*(\lg n)$ είναι ασυμπτωτικά μεγαλύτερη;

3.2-6
Δείξτε ότι ο λόγος της χρυσής τομής ϕ και ο συζυγής του $\widehat{\phi}$ ικανοποιούν αμφότεροι την εξίσωση $x^2 = x + 1$.

3.2-7
Αποδείξτε με επαγωγή ότι ο i-οστός αριθμός Fibonacci ικανοποιεί την ισότητα

$$F_i = \frac{\phi^i - \widehat{\phi}^i}{\sqrt{5}} \,,$$

όπου ϕ είναι ο λόγος της χρυσής τομής και $\widehat{\phi}$ ο συζυγής του.

3.2-8
Δείξτε ότι από τη σχέση $k \ln k = \Theta(n)$ συνεπάγεται ότι $k = \Theta(n/\ln n)$.

Προβλήματα

3-1 Ασυμπτωτική συμπεριφορά πολυωνύμων

Έστω

$$p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i ,$$

όπου $a_d > 0$, ένα πολυώνυμο βαθμού d ως προς n, και έστω k μια σταθερά. Αποδείξτε τις ακόλουθες ιδιότητες, χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των ασυμπτωτικών συμβολισμών:

α′. Αν $k \geq d$, τότε $p(n) = O(n^k)$.

β′. Αν $k \leq d$, τότε $p(n) = \Omega(n^k)$.

γ′. Αν $k = d$, τότε $p(n) = \Theta(n^k)$.

δ′. Αν $k > d$, τότε $p(n) = o(n^k)$.

ε′. Αν $k < d$, τότε $p(n) = \omega(n^k)$.

3-2 Σχετική ασυμπτωτική αύξηση

Για κάθε ζεύγος εκφράσεων (A, B) στον παρακάτω πίνακα, προσδιορίστε αν το A έχει αυξητικό χαρακτήρα O, o, Ω, ω, ή Θ του B. Υποθέστε ότι οι ποσότητες $k \geq 1$, $\epsilon > 0$, και $c > 1$ είναι σταθερές. Απαντήστε καταχωρίζοντας «ναι» ή «όχι» σε κάθε τετραγωνίδιο του πίνακα.

	A	B	O	o	Ω	ω	Θ
α′.	$\lg^k n$	n^ϵ					
β′.	n^k	c^n					
γ′.	$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$					
δ′.	2^n	$2^{n/2}$					
ε′.	$n^{\lg c}$	$c^{\lg n}$					
ς′.	$\lg(n!)$	$\lg(n^n)$					

3-3 Διάταξη κατά ασυμπτωτικό ρυθμό αύξησης

α′. Διατάξτε τις ακόλουθες συναρτήσεις με βάση τον αυξητικό τους χαρακτήρα· δηλαδή, βρείτε μια διάταξη $g_1, g_2, \ldots, g_{30}$ των συναρτήσεων η οποία να ικανοποιεί τις σχέσεις $g_1 = \Omega(g_2)$, $g_2 = \Omega(g_3)$, …, $g_{29} = \Omega(g_{30})$. Διαμερίστε τη λίστα που θα προκύψει σε κλάσεις ισοδυναμίας τέτοιες ώστε οι συναρτήσεις $f(n)$ και $g(n)$ να ανήκουν στην ίδια κλάση όταν και μόνο όταν $f(n) = \Theta(g(n))$.

$\lg(\lg^* n)$	$2^{\lg^* n}$	$(\sqrt{2})^{\lg n}$	n^2	$n!$	$(\lg n)!$
$(\frac{3}{2})^n$	n^3	$\lg^2 n$	$\lg(n!)$	2^{2^n}	$n^{1/\lg n}$
$\ln \ln n$	$\lg^* n$	$n \cdot 2^n$	$n^{\lg \lg n}$	$\ln n$	1
$2^{\lg n}$	$(\lg n)^{\lg n}$	e^n	$4^{\lg n}$	$(n+1)!$	$\sqrt{\lg n}$
$\lg^*(\lg n)$	$2^{\sqrt{2 \lg n}}$	n	2^n	$n \lg n$	$2^{2^{n+1}}$

β′. Αναφέρετε ένα παράδειγμα μη αρνητικής συνάρτησης $f(n)$ τέτοιας ώστε για όλες τις συναρτήσεις $g_i(n)$ στο υποερώτημα (α), η $f(n)$ να μην έχει χαρακτήρα ούτε $O(g_i(n))$ ούτε $\Omega(g_i(n))$.

3-4 Ιδιότητες ασυμπτωτικού συμβολισμού

Έστω $f(n)$ και $g(n)$ ασυμπτωτικά θετικές συναρτήσεις. Αποδείξτε ή καταρρίψτε καθεμία από τις ακόλουθες προτάσεις.

α′. $f(n) = O(g(n))$ συνεπάγεται ότι $g(n) = O(f(n))$.

β′. $f(n) + g(n) = \Theta(\min(f(n), g(n)))$.

γ′. $f(n) = O(g(n))$ συνεπάγεται ότι $\lg(f(n)) = O(\lg(g(n)))$, όπου $\lg(g(n)) \geq 1$ και $f(n) \geq 1$ από κάποια τιμή του n και πάνω.

δ′. $f(n) = O(g(n))$ συνεπάγεται ότι $2^{f(n)} = O\left(2^{g(n)}\right)$.

ε′. $f(n) = O\left((f(n))^2\right)$.

ς′. $f(n) = O(g(n))$ συνεπάγεται ότι $g(n) = \Omega(f(n))$.

ζ′. $f(n) = \Theta(f(n/2))$.

η′. $f(n) + o(f(n)) = \Theta(f(n))$.

3-5 Εναλλακτικοί ορισμοί των O και Ω

Ορισμένοι συγγραφείς ορίζουν το Ω κάπως διαφορετικά απ' ό,τι εμείς· ας εισαγάγουμε το σύμβολο $\overset{\infty}{\Omega}$ (το οποίο διαβάζεται «ωμέγα άπειρο») για αυτόν τον εναλλακτικό ορισμό. Λέμε ότι $f(n) = \overset{\infty}{\Omega}(g(n))$ αν υπάρχει θετική σταθερά c τέτοια ώστε $f(n) \geq cg(n) \geq 0$ για άπειρους το πλήθος ακεραίους n.

α′. Δείξτε ότι για οποιοδήποτε ζεύγος ασυμπτωτικά μη αρνητικών συναρτήσεων $f(n)$ και $g(n)$, ισχύει είτε ότι $f(n) = O(g(n))$ είτε ότι $f(n) = \overset{\infty}{\Omega}(g(n))$ ή και τα δύο, ενώ η αντίστοιχη πρόταση με Ω στη θέση του $\overset{\infty}{\Omega}$ δεν ισχύει.

β′. Περιγράψτε τα δυνητικά πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα που παρουσιάζει η χρήση του $\overset{\infty}{\Omega}$ αντί του Ω για τον χαρακτηρισμό του χρόνου εκτέλεσης προγραμμάτων.

Ορισμένοι συγγραφείς ορίζουν επίσης το O κάπως διαφορετικά· ας εισαγάγουμε το σύμβολο O' για αυτόν τον εναλλακτικό ορισμό. Λέμε ότι $f(n) = O'(g(n))$ όταν και μόνο όταν $|f(n)| = O(g(n))$.

γ′. Τι συμβαίνει σε κάθε κατεύθυνση της ισοδυναμίας «όταν και μόνο όταν» στο Θεώρημα 3.1 αν αντικαταστήσουμε το O' στη θέση του O αλλά διατηρήσουμε το Ω;

Ορισμένοι συγγραφείς χρησιμοποιούν το σύμβολο $\widetilde{O}$ (που διαβάζεται «όμικρον περισπωμένη») με την έννοια του O αλλά χωρίς λογαριθμικούς παράγοντες:

$$\widetilde{O}(g(n)) = \{f(n) : \text{ υπάρχουν θετικές σταθερές } c, k, \text{ και } n_0 \text{ τέτοιες ώστε } 0 \le f(n) \le cg(n) \lg^k(n) \text{ για κάθε } n \ge n_0\} \, .$$

δ′. Ορίστε κατά ανάλογο τρόπο τα $\widetilde{\Omega}$ και $\widetilde{\Theta}$. Αποδείξτε το αντίστοιχο του Θεωρήματος 3.1 για αυτόν τον εναλλακτικό συμβολισμό.

3-6 Επανειλημμένες συναρτήσεις

Ο τελεστής του «πλήθους επαναλήψεων» * που χρησιμοποιείται στη συνάρτηση $\lg^*$ μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιαδήποτε μονότονα αύξουσα συνάρτηση $f(n)$ επί των πραγματικών. Για κάποια δεδομένη σταθερά $c \in \mathbf{R}$, ορίζουμε την επανειλημμένη συνάρτηση f_c^* ως εξής:

$$f_c^*(n) = \min\{i \ge 0 : f^{(i)}(n) \le c\} \; ,$$

Η συνάρτηση αυτή δεν είναι απαραίτητο να είναι καλά ορισμένη σε όλες τις περιπτώσεις. Με άλλα λόγια, η ποσότητα $f_c^*(n)$ ισούται με το πλήθος των διαδοχικών εφαρμογών της f οι οποίες απαιτούνται για να ελαττωθεί το όρισμα σε τιμή μικρότερη ή ίση του c.

Για καθεμία από τις ακόλουθες συναρτήσεις $f(n)$ και σταθερές c, προσδιορίστε ένα όσο το δυνατόν αυστηρότερο φράγμα για την $f_c^*(n)$.

	$f(n)$	c	$f_c^*(n)$
α′.	$n-1$	0	
β′.	$\lg n$	1	
γ′.	$n/2$	1	
δ′.	$n/2$	2	
ε′.	$\sqrt{n}$	2	
ς′.	$\sqrt{n}$	1	
ζ′.	$n^{1/3}$	2	
η′.	$n/\lg n$	2	

Σημειώσεις κεφαλαίου

Ο Knuth [209] ανάγει την προέλευση του συμβολισμού O σε μια μελέτη του P. Bachmann με αντικείμενο τη θεωρία αριθμών, που χρονολογείται από το 1892. Ο συμβολισμός o εισήχθη από τον E. Landau το 1909 στο πλαίσιο της μελέτης του για την κατανομή των πρώτων αριθμών. Οι συμβολισμοί Ω και Θ προτάθηκαν από τον Knuth [213] προκειμένου να εκσυγχρονιστεί η διαδεδομένη στη βιβλιογραφία, αλλά τεχνικά άκομψη, πρακτική της χρήσης του συμβολισμού O τόσο για τα άνω όσο και για τα κάτω φράγματα. Πολλοί, ωστόσο, εξακολουθούν να χρησιμοποιούν τον συμβολισμό O σε περιπτώσεις όπου ο συμβολισμός Θ είναι τεχνικά ακριβέστερος. Λεπτομερέστερη περιγραφή της ιστορικής εξέλιξης και της ανάπτυξης των ασυμπτωτικών συμβολισμών περιλαμβάνουν τα κείμενα των Knuth [209, 213] και Brassard και Bratley [54].

Ο ασυμπτωτικός συμβολισμός δεν ορίζεται από όλους τους συγγραφείς με τον ίδιο τρόπο, αν και στις περισσότερες από τις συνήθεις περιστάσεις οι διάφοροι συμβολισμοί συμφωνούν μεταξύ τους. Ορισμένοι από τους εναλλακτικούς ορισμούς καλύπτουν και συναρτήσεις οι οποίες δεν είναι ασυμπτωτικά μη αρνητικές, υπό την προϋπόθεση ότι οι απόλυτες τιμές τους είναι κατάλληλα φραγμένες.

Η ισότητα (3.20) έχει διατυπωθεί από τον Robbins [297]. Για μια πληρέστερη περιγραφή των ιδιοτήτων των στοιχειωδών μαθηματικών συναρτήσεων, ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευθεί οποιοδήποτε καλό εγχειρίδιο αναφοράς στα μαθηματικά, όπως αυτό των Abramowitz και Stegun [1] ή του Zwillinger [362], ή κάποιο εγχειρίδιο απειροστικού λογισμού, όπως του Apostol [18] ή των Thomas et al. [334]. Τα βιβλία των Knuth [209] και Graham, Knuth, και Patashnik [152] περιέχουν πλούσιο υλικό σχετικά με τα διακριτά μαθηματικά όσον αφορά τη χρήση τους στην επιστήμη υπολογιστών.

4 Διαίρει-και-κυρίευε

Όπως είδαμε στην Ενότητα 2.3.1, η συγχωνευτική ταξινόμηση λειτουργεί σαν ένα παράδειγμα του μοντέλου διαίρει-και-κυρίευε. Θυμίζουμε ότι στη μέθοδο διαίρει-και-κυρίευε επιλύουμε ένα πρόβλημα αναδρομικά, εφαρμόζοντας σε κάθε επίπεδο της αναδρομής τρία βήματα:

Διαιρούμε το πρόβλημα σε διάφορα υποπροβλήματα τα οποία είναι μικρότερα στιγμιότυπα του ίδιου προβλήματος.

«**Κυριεύουμε**» τα υποπροβλήματα, επιλύοντάς τα αναδρομικά. Αν, όμως, τα υποπροβλήματα είναι αρκετά μικρού μεγέθους, απλώς τα επιλύουμε απευθείας.

Συνδυάζουμε τις λύσεις των υποπροβλημάτων ώστε να συνθέσουμε μια λύση του αρχικού προβλήματος.

Όταν τα υποπροβλήματα είναι αρκετά μεγάλα ώστε να επιλυθούν αναδρομικά, έχουμε τη λεγόμενη ***αναδρομική περίπτωση***. Από τη στιγμή που τα προβλήματα θα γίνουν αρκετά μικρά ώστε να μην επιλύονται πια αναδρομικά, λέμε ότι η αναδρομή «εξαντλείται», κι ότι έχουμε αναχθεί στη ***στοιχειώδη περίπτωση***. Μερικές φορές, εκτός από υποπροβλήματα που είναι μικρότερα στιγμιότυπα του ίδιου προβλήματος, θα πρέπει να επιλύσουμε προβλήματα που δεν συμπίπτουν με το αρχικό. Θωρούμε την επίλυση τέτοιων υποπροβλημάτων μέρος του βήματος συνδυασμού.

Στο κεφάλαιο αυτό, θα εξετάσουμε κι άλλους αλγορίθμους που βασίζονται στη μέθοδο διαίρει-και-κυρίευε. Ο πρώτος από αυτούς επιλύει το πρόβλημα της μέγιστης υπακολουθίας: παίρνει σαν είσοδο μια συστοιχία αριθμών, και προσδιορίζει τη συνεχή υπακολουθία της οποίας οι τιμές έχουν το μέγιστο άθροισμα. Κατόπιν θα μελετήσουμε δύο αλγορίθμους τύπου διαίρει-και-κυρίευε για τον πολλαπλασιασμό $n \times n$ πινάκων. Ο ένας έχει χρόνο εκτέλεσης $\Theta(n^3)$, που δεν υπερέχει της απλής μεθόδου πολλαπλασιασμού τετραγωνικών πινάκων. Ο άλλος, όμως, ο αλγόριθμος του Strassen, έχει χρόνο εκτέλεσης $O(n^{2,81})$, που υπερτερεί της απλής μεθόδου ασυμπτωτικά.

Αναδρομικές σχέσεις

Οι αναδρομικές σχέσεις είναι αναπόσπαστο τμήμα του μοντέλου διαίρει-και-κυρίευε, διότι μας προσφέρουν έναν φυσικό τρόπο να εκφράσουμε τον χρόνο εκτέλεσης ενός αλγορίθμου τύπου διαίρει-και-κυρίευε. ***Αναδρομική σχέση*** είναι μια εξίσωση ή ανίσωση η οποία ορίζει μια συνάρτηση μέσω της τιμής της για κάποιο μικρότερο όρισμα. Παραδείγματος χάριν, στην Ενότητα 2.3.2 είδαμε ότι ο χρόνος εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης $T(n)$ της διαδικασίας Συγχωνευτικη Ταξινομηση μπορεί να περιγραφεί μέσω της αναδρομικής σχέσης

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{εάν } n = 1\,, \\ 2T(n/2) + \Theta(n) & \text{εάν } n > 1\,, \end{cases} \tag{4.1}$$

η λύση της οποίας, όπως έχουμε αναφέρει, είναι $T(n) = \Theta(n \lg n)$.

Οι αναδρομικές σχέσεις μπορεί να έχουν διάφορες μορφές. Για παράδειγμα, ένας αναδρομικός αλγόριθμος θα μπορούσε να χωρίζει κάποιο πρόβλημα σε υποπροβλήματα διαφορετικών μεγεθών, λόγου χάριν $2/3$ προς $1/3$. Εάν τα βήματα της διαίρεσης και του συνδυασμού απαιτούν γραμμικό χρόνο, από έναν τέτοιο αλγόριθμο θα προέκυπτε η αναδρομική σχέση $T(n) = T(2n/3) + T(n/3) + \Theta(n)$.

Τα υποπροβλήματα δεν είναι απαραιτήτως κάποιο σταθερό κλάσμα του μεγέθους του αρχικού προβλήματος. Παραδείγματος χάριν, μια αναδρομική εκδοχή της γραμμικής αναζήτησης (βλ. Άσκηση 2.1-3) θα δημιουργούσε ένα μόνο υποπρόβλημα που θα περιείχε μόνο ένα στοιχείο λιγότερο απ' ό,τι το αρχικό πρόβλημα. Κάθε αναδρομική κλήση θα απαιτούσε σταθερό χρόνο συν τον χρόνο για τις αναδρομικές κλήσεις που εκτελεί, οπότε η αντίστοιχη αναδρομική σχέση θα ήταν $T(n) = T(n-1) + \Theta(1)$.

Στο κεφάλαιο αυτό, θα εξετάσουμε τρεις μεθόδους επίλυσης αναδρομικών σχέσεων –δηλαδή, εύρεσης ασυμπτωτικών φραγμάτων τύπου «Θ» ή «O» της λύσης.

- Στη ***μέθοδο της αντικατάστασης***, εικάζουμε κάποιο φράγμα και στη συνέχεια αποδεικνύουμε την ορθότητα της εικασίας μας με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

- Στη ***μέθοδο του δένδρου αναδρομής***, απεικονίζουμε την αναδρομική σχέση με τη μορφή ενός δένδρου οι κόμβοι του οποίου αντιπροσωπεύουν τα κόστη που υπεισέρχονται στα διάφορα επίπεδα της αναδρομής· η έκφραση που προκύπτει από την άθροιση των επιμέρους ποσοτήτων υπολογίζεται με τεχνικές φραγής αθροισμάτων.

- Τέλος, η ***μέθοδος του κυρίαρχου όρου*** παρέχει φράγματα για αναδρομικές σχέσεις της μορφής

  $$T(n) = aT(n/b) + f(n)\,, \tag{4.2}$$

  όπου $a \geq 1$, $b > 1$, και $f(n)$ είναι μια δεδομένη συνάρτηση. Τέτοιες αναδρομικές σχέσεις προκύπτουν συχνά. Μια αναδρομική σχέση της μορφής (4.2) χαρακτηρίζει έναν αλγόριθμο τύπου διαίρει-και-κυρίευε ο οποίος δημιουργεί a υποπροβλήματα, που το καθένα έχει μέγεθος $1/b$ του μεγέθους του αρχικού προβλήματος και απαιτεί συνολικά για τα βήματα της διαίρεσης και του συνδυασμού χρόνο $f(n)$.

  Για να χρησιμοποιήσει κανείς τη μέθοδο του κυρίαρχου όρου θα πρέπει να αποστηθίσει τρεις περιπτώσεις, αλλά από τη στιγμή που γνωρίζει τις περιπτώσεις αυτές μπορεί να προσδιορίσει εύκολα τα ασυμπτωτικά φράγματα για πολλές απλές αναδρομικές σχέσεις. Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του κυρίαρχου όρου για να υπολογίσουμε τον χρόνο εκτέλεσης των αλγορίθμων για το πρόβλημα της μέγιστης υπακολουθίας και για τον πολλαπλασιασμό πινάκων, καθώς και άλλων αλγορίθμων τύπου διαίρει-και-κυρίευε σε άλλα κεφάλαια του βιβλίου.

Περιστασιακά, θα αντιμετωπίσουμε αναδρομικές σχέσεις που δεν έχουν τη μορφή ισότητας, αλλά ανισότητας, όπως π.χ. $T(n) \leq 2T(n/2) + \Theta(n)$. Επειδή μια τέτοια αναδρομική σχέση ορίζει μόνο ένα άνω φράγμα για το $T(n)$, δεν θα εκφράζουμε τη λύση της σε συμβολισμό Θ, αλλά σε συμβολισμό O. Αντίστοιχα, αν η ανισότητα είχε αντίστροφη φορά, $T(n) \geq 2T(n/2) + \Theta(n)$, τότε επειδή η αναδρομική σχέση δίνει μόνο ένα κάτω φράγμα για το $T(n)$, θα χρησιμοποιούσαμε στη λύση της συμβολισμό Ω.

Τεχνικές λεπτομέρειες για αναδρομικές σχέσεις

Στην πράξη, όταν διατυπώνουμε και επιλύουμε αναδρομικές σχέσεις αγνοούμε ορισμένες τεχνικές λεπτομέρειες. Για παράδειγμα, αν καλέσουμε τη Συγχωνευτική Ταξινόμηση με είσοδο n στοιχεία, για n περιττό, θα προκύψουν υποπροβλήματα με μέγεθος $\lfloor n/2 \rfloor$ και $\lceil n/2 \rceil$. Κανένα από τα δύο μεγέθη δεν είναι ίσο με $n/2$, διότι όταν το n είναι περιττό το $n/2$ δεν είναι ακέραιος αριθμός. Από τεχνικής πλευράς, η αναδρομική σχέση που περιγράφει τον χρόνο εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης της Συγχωνευτικής Ταξινόμησης έχει στην πραγματικότητα τη μορφή:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{εάν } n = 1 \, , \\ T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n) & \text{εάν } n > 1 \, . \end{cases} \tag{4.3}$$

Μια άλλη κατηγορία λεπτομερειών που συνήθως αγνοούμε είναι οι συνοριακές συνθήκες. Επειδή ο χρόνος εκτέλεσης ενός αλγορίθμου για είσοδο σταθερού μεγέθους είναι μια σταθερή ποσότητα, στις αναδρομικές σχέσεις που προκύπτουν για τους χρόνους εκτέλεσης αλγορίθμων ισχύει εν γένει ότι $T(n) = \Theta(1)$ για αρκετά μικρές τιμές του n. Κατά συνέπεια, χάριν απλότητας, συνήθως θα παραλείπουμε να δηλώνουμε τις συνοριακές συνθήκες των αναδρομικών σχέσεων και θα υποθέτουμε ότι το $T(n)$ είναι σταθερό για μικρές τιμές του n. Παραδείγματος χάριν, η αναδρομική σχέση (4.1) διατυπώνεται συνήθως στη μορφή

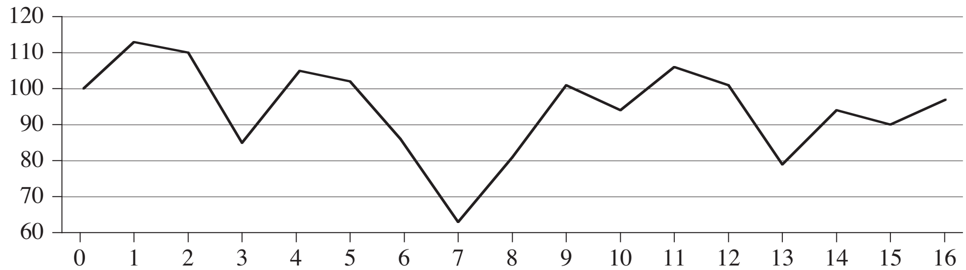
$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n) \, , \tag{4.4}$$

χωρίς να αναφέρονται ρητά οι τιμές του $T(n)$ για μικρά n. Ο λόγος είναι ότι παρ' όλο που η ακριβής λύση της αναδρομικής σχέσης μεταβάλλεται όταν αλλάζει η τιμή του $T(1)$, κατά κανόνα η μεταβολή αυτή αντιστοιχεί το πολύ σε έναν σταθερό παράγοντα, και επομένως ο αυξητικός χαρακτήρας παραμένει αναλλοίωτος.

Όταν διατυπώνουμε και επιλύουμε αναδρομικές σχέσεις, συνήθως παραλείπουμε κατώφλια, ανώφλια και συνοριακές συνθήκες. Προχωρούμε απερίσπαστοι στην επίλυση αγνοώντας αυτές τις λεπτομέρειες, και εξετάζουμε εκ των υστέρων κατά πόσο επηρεάζουν τη λύση ή όχι. Συνήθως δεν την επηρεάζουν, αλλά όταν έχουν κάποια επίπτωση θα πρέπει να το γνωρίζουμε. Στο ζήτημα αυτό σημαντικό ρόλο παίζει η εμπειρία, ενώ αρκετά χρήσιμα είναι και ορισμένα θεωρήματα τα οποία βεβαιώνουν ότι οι λεπτομέρειες αυτές δεν επηρεάζουν τα ασυμπτωτικά φράγματα πολλών αναδρομικών σχέσεων που αφορούν αλγορίθμους τύπου διαίρει-και-κυρίευε (βλ. Θεώρημα 4.1). Στο κεφάλαιο αυτό, ωστόσο, θα αναλύσουμε ορισμένες από αυτές τις λεπτομέρειες και θα καταδείξουμε τα λεπτά σημεία των μεθόδων επίλυσης αναδρομικών σχέσεων.

4.1 Το πρόβλημα της μέγιστης υποσυστοιχίας

Ας υποθέσουμε ότι έχετε τη δυνατότητα να επενδύσετε κάποια χρήματα στην εταιρεία Πτητικά Χημικά Α.Ε. Όπως και τα χημικά που παράγει η εταιρεία, έτσι και

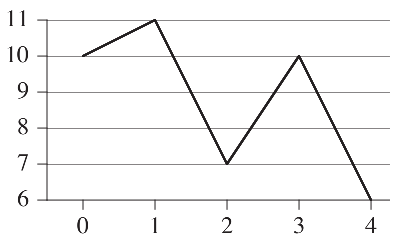


Ημέρα	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Τιμή	100	113	110	85	105	102	86	63	81	101	94	106	101	79	94	90	97
Μεταβολή		13	-3	-25	20	-3	-16	-23	18	20	-7	12	-5	-22	15	-4	7

Σχήμα 4.1 Πληροφορίες για την τιμή των μετοχών της εταιρείας Πτητικά Χημικά Α.Ε. μετά το τέλος της κάθε συνεδρίασης για μια περίοδο 17 ημερών. Στον οριζόντιο άξονα του διαγράμματος απεικονίζεται η ημέρα, και στον κατακόρυφο η τιμή. Στην τελευταία γραμμή του πίνακα παρατίθεται η μεταβολή της τιμής κάθε μέρα σε σχέση με την προηγούμενη μέρα.

η τιμή της μετοχής της είναι αρκετά ασταθής. Σας επιτρέπεται να αγοράσετε ένα «πακέτο» μετοχών μόνο μία φορά, και να το πουλήσετε σε κάποια μεταγενέστερη χρονική στιγμή· τόσο η αγορά όσο και η πώληση θα γίνουν ακριβώς μετά από το τέλος της συνεδρίασης του χρηματιστηρίου για την εκάστοτε μέρα. Σαν αντιστάθμισμα γι' αυτό τον περιορισμό, γνωρίζετε ποια θα είναι η τιμή των μετοχών στο μέλλον. Ο στόχος σας είναι να μεγιστοποιήσετε το κέρδος σας. Στο Σχήμα 4.1 απεικονίζεται η τιμή των μετοχών για μια περίοδο 17 ημερών. Μπορείτε να αγοράσετε τις μετοχές οποιαδήποτε στιγμή μετά από τη μέρα 0, όπου η τιμή της είναι 100 ευρώ. Προφανώς, θα θέλατε «να αγοράσετε φτηνά και να πουλήσετε ακριβά» –δηλαδή να αγοράσετε στη χαμηλότερη δυνατή τιμή και αργότερα να πουλήσετε στην ψηλότερη δυνατή τιμή– ώστε να μεγιστοποιήσετε το κέρδος σας. Δυστυχώς, ίσως να μη μπορείτε να αγοράσετε στη χαμηλότερη τιμή και κατόπιν να πουλήσετε στην ψηλότερη για κάποια δεδομένη περίοδο. Στο Σχήμα 4.1, η χαμηλότερη τιμή εμφανίζεται μετά τη μέρα 7, δηλαδή μετά από την ψηλότερη τιμή, η οποία εμφανίζεται μετά από τη μέρα 1.

Θα νόμιζε ίσως κανείς ότι μπορούμε πάντοτε να μεγιστοποιήσουμε το κέρδος είτε αγοράζοντας στη χαμηλότερη τιμή είτε πουλώντας στην ψηλότερη. Για παράδειγμα, με τα δεδομένα του Σχήματος 4.1, θα μεγιστοποιούσαμε το κέρδος αγοράζοντας στη χαμηλότερη τιμή, μετά από τη μέρα 7. Εάν αυτή η στρατηγική δούλευε πάντα, θα ήταν εύκολο να βρούμε πώς να μεγιστοποιήσουμε το κέρδος: βρίσκουμε την ψηλότερη και τη χαμηλότερη τιμή, και στη συνέχεια κινούμαστε αριστερά από την ψηλότερη για να βρούμε τη χαμηλότερη προγενέστερη τιμή, κινούμαστε δεξιά από τη χαμηλότερη για να βρούμε την ψηλότερη μεταγενέστερη τιμή, και παίρνουμε το ζεύγος με τη μεγαλύτερη διαφορά. Στο Σχήμα 4.2, όμως, βλέπουμε ένα απλό αντιπαράδειγμα που δείχνει ότι σε κάποιες περιπτώσεις το μέγιστο κέρδος δεν προκύπτει ούτε αγοράζοντας στη χαμηλότερη ούτε πουλώντας στην ψηλότερη τιμή.



Ημέρα	0	1	2	3	4
Τιμή	10	11	7	10	6
Μεταβολή		1	−4	3	−4

Σχήμα 4.2 Ένα παράδειγμα που δείχνει ότι το μέγιστο κέρδος δεν εξασφαλίζεται πάντα αν ξεκινήσουμε από τη χαμηλότερη τιμή ή αν σταματήσουμε στην ψηλότερη. Και πάλι, στον οριζόντιο άξονα απεικονίζεται η ημέρα και στην κατακόρυφο η τιμή. Στην προκειμένη περίπτωση το μέγιστο κέρδος, 3 ευρώ ανά μετοχή, προκύπτει αν αγοράσουμε μετά την ημέρα 2 και πουλήσουμε μετά την ημέρα 3. Η τιμή 7 ευρώ μετά την ημέρα 2 δεν είναι η χαμηλότερη όλων, και η τιμή 10 ευρώ μετά την ημέρα 3 δεν είναι η ψηλότερη όλων.

Μια λύση εξαντλητικού τύπου

Μπορούμε εύκολα να καταστρώσουμε μια λύση εξαντλητικού τύπου γι’ αυτό το πρόβλημα: απλώς δοκιμάζουμε κάθε ζεύγος ημερών αγοράς και πώλησης στο οποίο η ημέρα αγοράς προηγείται της ημέρας πώλησης. Σε μια περίοδο n ημερών υπάρχουν $\binom{n}{2}$ τέτοια ζεύγη. Δεδομένου ότι το $\binom{n}{2}$ είναι $\Theta(n^2)$, και ότι το καλύτερο που μπορούμε να ελπίζουμε είναι να υπολογίσουμε κάθε ζεύγος ημερών σε σταθερό χρόνο, με την τακτική αυτή θα χρειαζόμασταν χρόνο $\Omega(n^2)$. Μήπως μπορούμε να πετύχουμε κάτι καλύτερο;

Ένας μετασχηματισμός

Για να σχεδιάσουμε έναν αλγόριθμο με χρόνο εκτέλεσης $o(n^2)$, θα εξετάσουμε την είσοδο με κάπως διαφορετικό τρόπο. Θέλουμε να βρούμε μια ακολουθία ημερών κατά την οποία η συνολική μεταβολή από την πρώτη μέχρι την τελευταία ημέρα να είναι μέγιστη. Αντί να εξετάζουμε τις τιμές στις διάφορες ημέρες, ας εξετάσουμε την ημερήσια μεταβολή της τιμής, όπου η μεταβολή την ημέρα i είναι η διαφορά ανάμεσα στην τιμή μετά την ημέρα i και την τιμή μετά την ημέρα $i-1$. Οι ημερήσιες αυτές μεταβολές παρουσιάζονται στην τελευταία γραμμή του πίνακα στο Σχήμα 4.1. Αν τώρα θεωρήσουμε αυτή τη γραμμή σαν μια συστοιχία A (Σχήμα 4.3), θέλουμε να βρούμε τη μη κενή συνεχή υποσυστοιχία της A της οποίας οι τιμές έχουν το μεγαλύτερο άθροισμα. Η υποσυστοιχία αυτή είναι η λεγόμενη ***μέγιστη υποσυστοιχία***. Για παράδειγμα, στη συστοιχία του Σχήματος 4.3, η μέγιστη υποσυστοιχία της $A[1\,..\,16]$ είναι η $A[8\,..\,11]$, με άθροισμα 43. Συνεπώς, θα πρέπει να αγοράσουμε τις μετοχές ακριβώς πριν από την ημέρα 8 (δηλαδή μετά την ημέρα 7) και να τις πουλήσουμε μετά την ημέρα 11, οπότε θα έχουμε κέρδος 43 ευρώ ανά μετοχή.

Εκ πρώτης όψεως, ο μετασχηματισμός αυτός δεν βοηθάει σε τίποτα. Και πάλι θα πρέπει να ελέγξουμε $\binom{n-1}{2} = \Theta(n^2)$ υποσυστοιχίες για μια περίοδο n ημερών. Όπως σας ζητείται να δείξετε στην Άσκηση 4.1-2, αν και ο υπολογισμός του αθροίσματος για μία υποσυστοιχία απαιτεί ίσως χρόνο ανάλογο προς το μήκος της υποσυστοιχίας, όταν υπολογίζουμε όλα τα αθροίσματα για τις $\Theta(n^2)$ υποσυστοιχίες μπορούμε να οργανώσουμε τον υπολογισμό έτσι ώστε το άθροισμα της κάθε

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	13	–3	–25	20	–3	–16	–23	18	20	–7	12	–5	–22	15	–4	7

μέγιστη υποσυστοιχία

Σχήμα 4.3 Η μεταβολή της τιμής των μετοχών σαν ένα πρόβλημα μέγιστης υποσυστοιχίας. Στην προκειμένη περίπτωση, η υποσυστοιχία που έχει το μεγαλύτερο άθροισμα απ' όλες τις συνεχείς υποσυστοιχίες της A είναι η $A[8\mathinner{.\,.}11]$, με άθροισμα 43.

υποσυστοιχίας να απαιτεί χρόνο $O(1)$, με δεδομένες τις τιμές των αθροισμάτων που έχουν υπολογιστεί προηγουμένως, και επομένως η λύση εξαντλητικού τύπου απαιτεί χρόνο $\Theta(n^2)$.

Ας αναζητήσουμε λοιπόν μια πιο αποδοτική λύση στο πρόβλημα της μέγιστης υποσυστοιχίας. Στην πορεία μας αυτή, θα αναφερόμαστε σε «μια» μέγιστη υποσυστοιχία, και όχι «στη» μέγιστη υποσυστοιχία, αφού πιθανόν να υπάρχουν περισσότερες από μία υποσυστοιχίες που πετυχαίνουν το μέγιστο άθροισμα.

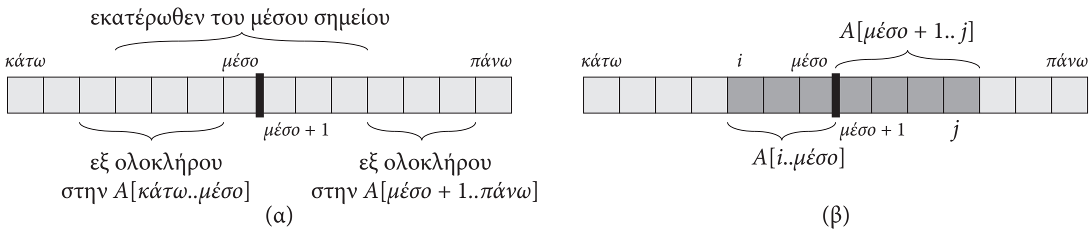
Το πρόβλημα της μέγιστης υποσυστοιχίας είναι ενδιαφέρον μόνο όταν η συστοιχία περιέχει κάποιους αρνητικούς αριθμούς. Αν όλα τα στοιχεία της συστοιχίας ήταν μη αρνητικά τότε το πρόβλημα δεν θα παρουσίαζε καμία δυσκολία, αφού το μεγαλύτερο δυνατό άθροισμα θα αντιστοιχούσε σε ολόκληρη τη συστοιχία.

Μια λύση με τη μέθοδο διαίρει-και-κυρίευε

Ας σκεφτούμε πώς θα μπορούσαμε να λύσουμε το πρόβλημα της μέγιστης υποσυστοιχίας με τη μέθοδο διαίρει-και-κυρίευε. Έστω ότι θέλουμε να βρούμε μια μέγιστη υποσυστοιχία της υποσυστοιχίας $A[\textit{κάτω}\mathinner{.\,.}\textit{πάνω}]$. Σύμφωνα με την τεχνική διαίρει-και-κυρίευε, θα πρέπει να διαιρέσουμε την υποσυστοιχία σε δύο υποσυστοιχίες όσο το δυνατόν πιο ισομεγέθεις. Δηλαδή, βρίσκουμε το μέσο σημείο της υποσυστοιχίας, έστω *μέσο*, και εξετάζουμε τις υποσυστοιχίες $A[\textit{κάτω}\mathinner{.\,.}\textit{μέσο}]$ και $A[\textit{μέσο}+1\mathinner{.\,.}\textit{πάνω}]$. Όπως βλέπουμε στο Σχήμα 4.4(α), οποιαδήποτε συνεχής υποσυστοιχία $A[i\mathinner{.\,.}j]$ της $A[\textit{κάτω}\mathinner{.\,.}\textit{πάνω}]$ θα πρέπει να βρίσκεται σε μία και μόνο μία από τις παρακάτω περιοχές:

- εξ ολοκλήρου στην υποσυστοιχία $A[\textit{κάτω}\mathinner{.\,.}\textit{μέσο}]$, οπότε $\textit{κάτω} \le i \le j \le \textit{μέσο}$,
- εξ ολοκλήρου στην υποσυστοιχία $A[\textit{μέσο}+1\mathinner{.\,.}\textit{πάνω}]$, οπότε $\textit{μέσο} < i \le j \le \textit{πάνω}$, ή
- εκατέρωθεν του μέσου σημείου, οπότε $\textit{κάτω} \le i \le \textit{μέσο} < j \le \textit{πάνω}$.

Επομένως, μια μέγιστη υποσυστοιχία της $A[\textit{κάτω}\mathinner{.\,.}\textit{πάνω}]$ θα πρέπει να βρίσκεται σε μία και μόνο μία από αυτές τις περιοχές. Μάλιστα, μια μέγιστη υποσυστοιχία της $A[\textit{κάτω}\mathinner{.\,.}\textit{πάνω}]$ θα πρέπει να έχει το μεγαλύτερο άθροισμα μεταξύ όλων των υποσυστοιχιών που βρίσκονται εξ ολοκλήρου στην $A[\textit{κάτω}\mathinner{.\,.}\textit{μέσο}]$, εξ ολοκλήρου στην $A[\textit{μέσο}+1\mathinner{.\,.}\textit{πάνω}]$, ή εκατέρωθεν του μέσου σημείου. Μπορούμε να βρούμε μέγιστες υποσυστοιχίες των $A[\textit{κάτω}\mathinner{.\,.}\textit{μέσο}]$ και $A[\textit{μέσο}+1\mathinner{.\,.}\textit{πάνω}]$ αναδρομικά, αφού αυτά τα δύο υποπροβλήματα είναι μικρότερα στιγμιότυπα του προβλήματος της εύρεσης μέγιστης υποσυστοιχίας. Άρα, το μόνο που μας απομένει είναι να βρούμε μια μέγιστη υποσυστοιχία εκατέρωθεν του μέσου σημείου, και να επιλέξουμε μια υποσυστοιχία από τις τρεις η οποία να έχει το μεγαλύτερο άθροισμα.



Σχήμα 4.4 **(α)** Πιθανές θέσεις των υποσυστοιχιών της $A[\textit{κάτω} \,..\, \textit{πάνω}]$: εξ ολοκλήρου στην $A[\textit{κάτω} \,..\, \textit{μέσο}]$, εξ ολοκλήρου στην $A[\textit{μέσο} + 1 \,..\, \textit{πάνω}]$, και εκατέρωθεν του μέσου σημείου *μέσο*. **(β)** Οποιαδήποτε υποσυστοιχία της $A[\textit{κάτω} \,..\, \textit{πάνω}]$ που βρίσκεται εκατέρωθεν του μέσου σημείου αποτελείται από δύο υποσυστοιχίες $A[i \,..\, \textit{μέσο}]$ και $A[\textit{μέσο} + 1 \,..\, j]$, όπου $\textit{κάτω} \le i \le \textit{μέσο}$ και $\textit{μέσο} < j \le \textit{πάνω}$.

Μπορούμε να βρούμε εύκολα μια μέγιστη υποσυστοιχία εκατέρωθεν του μέσου σημείου σε χρόνο γραμμικό ως προς το μέγεθος της υποσυστοιχίας $A[\textit{κάτω} \,..\, \textit{πάνω}]$. Το πρόβλημα αυτό *δεν* είναι μικρότερο στιγμιότυπο του αρχικού μας προβλήματος, διότι έχει επιπλέον τον περιορισμό ότι η υποσυστοιχία που επιλέγεται πρέπει να βρίσκεται εκατέρωθεν του μέσου σημείου. Όπως βλέπουμε στο Σχήμα 4.4(β), κάθε υποσυστοιχία που βρίσκεται εκατέρωθεν του μέσου σημείου αποτελείται και η ίδια από δύο υποσυστοιχίες $A[i \,..\, \textit{μέσο}]$ και $A[\textit{μέσο} + 1 \,..\, j]$, όπου $\textit{κάτω} \le i \le \textit{μέσο}$ και $\textit{μέσο} < j \le \textit{πάνω}$. Επομένως, αρκεί να βρούμε μέγιστες υποσυστοιχίες της μορφής $A[i \,..\, \textit{μέσο}]$ και $A[\textit{μέσο}+1 \,..\, j]$, και κατόπιν να τις συνενώσουμε. Η διαδικασία Ευρεση Μεγιστης Εκατερωθεν Υποσυστοιχιας δέχεται σαν είσοδο τη συστοιχία A και τους αριθμοδείκτες *κάτω*, *μέσο*, και *πάνω*, και επιστρέφει μια πλειάδα που περιέχει τους αριθμοδείκτες που οριοθετούν μια μέγιστη υποσυστοιχία εκατέρωθεν του μέσου σημείου, και το άθροισμα των τιμών μιας μέγιστης υποσυστοιχίας.

```
Ευρεση Μεγιστης Εκατερωθεν Υποσυστοιχιας(A, κάτω, μέσο, πάνω)
 1  αρ-άθροισμα = −∞
 2  άθροισμα = 0
 3  για i = μέσο αντίστροφα-έως κάτω
 4          άθροισμα = άθροισμα + A[i]
 5          αν άθροισμα > αρ-άθροισμα
 6                  αρ-άθροισμα = άθροισμα
 7                  μεγ-αριστερό = i
 8  δ-άθροισμα = −∞
 9  άθροισμα = 0
10  για j = μέσο + 1 έως πάνω
11          άθροισμα = άθροισμα + A[j]
12          αν άθροισμα > δ-άθροισμα
13                  δ-άθροισμα = άθροισμα
14                  μεγ-δεξιό = j
15  επιστροφή (μεγ-αριστερό, μεγ-δεξιό, αρ-άθροισμα + δ-άθροισμα)
```

Η διαδικασία αυτή λειτουργεί ως εξής. Στις γραμμές 1–7 βρίσκουμε μια μέγιστη υποσυστοιχία του αριστερού μισού, $A[\textit{κάτω} \,..\, \textit{μέσο}]$. Αφού αυτή η υποσυστοιχία θα πρέπει να περιλαμβάνει το $A[\textit{μέσο}]$, ο μετρητής i του βρόχου **για** στις γραμμές 3–7 ξεκινάει από την τιμή *μέσο* και μειώνεται μέχρι την τιμή *κάτω*, οπότε κάθε υποσυστοιχία που εξετάζεται είναι της μορφής $A[i \,..\, \textit{μέσο}]$. Στις γραμμές 1–2 αποδίδονται αρχικές τιμές στις μεταβλητές *αρ-άθροισμα*, όπου αποθηκεύεται το μεγαλύτερο άθροισμα που έχει βρεθεί μέχρι στιγμής, και *άθροισμα*, όπου αποθηκεύεται το άθροισμα των στοιχείων της $A[i\,..\,\textit{μέσο}]$. Κάθε φορά που βρίσκουμε, στη γραμμή 5, μια υποσυστοιχία $A[i\,..\,\textit{μέσο}]$ με άθροισμα τιμών μεγαλύτερο από το *αρ-άθροισμα*, ενημερώνουμε το *αρ-άθροισμα* εξισώνοντάς το με το άθροισμα αυτής της υποσυστοιχίας, στη γραμμή 6, και στη γραμμή 7 ενημερώνουμε τη μεταβλητή *μεγ-αριστερό* με αυτόν τον αύξοντα αριθμό i. Οι γραμμές 8–14 εκτελούν την αντίστοιχη λειτουργία για το δεξί μισό, $A[\textit{μέσο}+1\,..\,\textit{πάνω}]$. Σε αυτή την περίπτωση, ο μετρητής j του βρόχου **για** στις γραμμές 10–14 ξεκινάει από την τιμή $\textit{μέσο}+1$ και αυξάνεται μέχρι την τιμή *πάνω*, οπότε κάθε υποσυστοιχία που εξετάζεται είναι της μορφής $A[\textit{μέσο}+1\,..\,j]$. Τέλος, στη γραμμή 15 επιστρέφονται οι αύξοντες αριθμοί *μεγ-αριστερό* και *μεγ-δεξιό* που οριοθετούν μια μέγιστη υποσυστοιχία εκατέρωθεν του μέσου σημείου, καθώς και το άθροισμα $\textit{αρ-άθροισμα} + \textit{δ-άθροισμα}$ των τιμών στην υποσυστοιχία $A[\textit{μεγ-αριστερό}\,..\,\textit{μεγ-δεξιό}]$.

Θα δείξουμε ότι αν η υποσυστοιχία $A[\textit{κάτω}\,..\,\textit{πάνω}]$ περιέχει n στοιχεία (οπότε $n = \textit{πάνω} - \textit{κάτω} + 1$), τότε η κλήση Εύρεση Μέγιστης Εκατέρωθεν Υποσυστοιχίας$(A, \textit{κάτω}, \textit{μέσο}, \textit{πάνω})$ απαιτεί χρόνο $\Theta(n)$. Δεδομένου ότι κάθε επανάληψη καθενός από τους δύο βρόχους **για** απαιτεί χρόνο $\Theta(1)$, αρκεί να μετρήσουμε πόσες επαναλήψεις εκτελούνται συνολικά. Ο βρόχος **για** στις γραμμές 3–7 εκτελεί $\textit{μέσο} - \textit{κάτω} + 1$ επαναλήψεις, και ο βρόχος **για** στις γραμμές 10–14 εκτελεί $\textit{πάνω} - \textit{μέσο}$ επαναλήψεις· επομένως ο συνολικός αριθμός επαναλήψεων είναι

$$\begin{aligned}(\textit{μέσο} - \textit{κάτω} + 1) + (\textit{πάνω} - \textit{μέσο}) &= \textit{πάνω} - \textit{κάτω} + 1 \\ &= n\,.\end{aligned}$$

Έχοντας στη διάθεσή μας μια διαδικασία Εύρεση Μέγιστης Εκατέρωθεν Υποσυστοιχίας γραμμικού χρόνου, μπορούμε να γράψουμε ψευδοκώδικα για έναν αλγόριθμο τύπου διαίρει-και-κυρίευε που επιλύει το πρόβλημα της μέγιστης υποσυστοιχίας:

Εύρεση Μέγιστης Υποσυστοιχίας$(A, \textit{κάτω}, \textit{πάνω})$

αν *πάνω* == *κάτω*
    επιστροφή $(\textit{κάτω}, \textit{πάνω}, A[\textit{κάτω}])$ // στοιχειώδης περίπτωση: μόνο ένα στοιχείο
άλλως $\textit{μέσο} = \lfloor(\textit{κάτω} + \textit{πάνω})/2\rfloor$
    $(\textit{αρ-κάτω}, \textit{αρ-πάνω}, \textit{αρ-άθροισμα}) =$
        Εύρεση Μέγιστης Υποσυστοιχίας$(A, \textit{κάτω}, \textit{μέσο})$
    $(\textit{δ-κάτω}, \textit{δ-πάνω}, \textit{δ-άθροισμα}) =$
        Εύρεση Μέγιστης Υποσυστοιχίας$(A, \textit{μέσο}+1, \textit{πάνω})$
    $(\textit{εκ-κάτω}, \textit{εκ-πάνω}, \textit{εκ-άθροισμα}) =$
        Εύρεση Μέγιστης Εκατέρωθεν
            Υποσυστοιχίας$(A, \textit{κάτω}, \textit{μέσο}, \textit{πάνω})$
    αν $\textit{αρ-άθροισμα} \geq \textit{δ-άθροισμα}$ και $\textit{αρ-άθροισμα} \geq \textit{εκ-άθροισμα}$
        επιστροφή $(\textit{αρ-κάτω}, \textit{αρ-πάνω}, \textit{αρ-άθροισμα})$
    άλλως-αν $\textit{δ-άθροισμα} \geq \textit{αρ-άθροισμα}$ και $\textit{δ-άθροισμα} \geq \textit{εκ-άθροισμα}$
        επιστροφή $(\textit{δ-κάτω}, \textit{δ-πάνω}, \textit{δ-άθροισμα})$
    άλλως επιστροφή $(\textit{εκ-κάτω}, \textit{εκ-πάνω}, \textit{εκ-άθροισμα})$

Με την αρχική κλήση Εύρεση Μέγιστης Υποσυστοιχίας$(A, 1, A.\textit{μήκος})$ προσδιορίζεται μια μέγιστη υποσυστοιχία της $A[1\,..\,n]$.

Αντίστοιχα με την Εύρεση Μέγιστης Εκατέρωθεν Υποσυστοιχίας, η αναδρομική διαδικασία Εύρεση Μέγιστης Υποσυστοιχίας επιστρέφει μια πλειάδα που περιλαμβάνει τους αύξοντες αριθμούς που οριοθετούν μια μέγιστη υποσυστοιχία, καθώς και το άθροισμα των τιμών μιας μέγιστης υποσυστοιχίας. Στη γραμμή 1 γίνεται ο έλεγχος για τη στοιχειώδη περίπτωση, όπου η υποσυστοιχία έχει ένα μόνο στοιχείο. Δεδομένου ότι μια υποσυστοιχία με ένα μόνο στοιχείο έχει μόνο μία υποσυστοιχία (τον εαυτό της), στη γραμμή 2 επιστρέφεται μια πλειάδα με τον αρχικό και τον καταληκτικό αύξοντα αριθμό αυτής της μονοστοιχιακής «συστοιχίας», καθώς και η τιμή του μοναδικού στοιχείου. Οι γραμμές 3–11 διαχειρίζονται την αναδρομική περίπτωση. Στη γραμμή 3 εκτελείται η «διαίρεση», δηλαδή υπολογίζεται ο αύξων αριθμός *μέσο* του μέσου σημείου. Θα αποκαλούμε την υποσυστοιχία $A[\textit{κάτω} \,..\, \textit{μέσο}]$ ***αριστερή υποσυστοιχία*** και την $A[\textit{μέσο} + 1 \,..\, \textit{πάνω}]$ ***δεξιά υποσυστοιχία***. Αφού γνωρίζουμε ότι η υποσυστοιχία $A[\textit{κάτω} \,..\, \textit{πάνω}]$ περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία, τόσο η αριστερή όσο και η δεξιά υποσυστοιχία θα πρέπει να έχουν τουλάχιστον από ένα στοιχείο. Στις γραμμές 4 και 5 εκτελείται το βήμα της «κυρίευσης», με αναδρομική εύρεση μέγιστων υποσυστοιχιών εντός της αριστερής και της δεξιάς υποσυστοιχίας. Οι γραμμές 6–11 αποτελούν το σκέλος του «συνδυασμού». Στη γραμμή 6 προσδιορίζεται μια μέγιστη υποσυστοιχία που βρίσκεται εκατέρωθεν του μέσου σημείου. (Υπενθυμίζουμε ότι επειδή στη γραμμή 6 επιλύεται ένα υποπρόβλημα που δεν είναι μικρότερο στιγμιότυπο του αρχικού προβλήματος, θεωρούμε ότι αυτή η γραμμή ανήκει στο σκέλος του συνδυασμού.) Στη γραμμή 7 ελέγχεται αν η αριστερή υποσυστοιχία περιέχει μια υποσυστοιχία με το μέγιστο άθροισμα, και στη γραμμή 8 επιστρέφεται αυτή η μέγιστη υποσυστοιχία. Εάν δεν συμβαίνει αυτό, στη γραμμή 9 ελέγχεται αν η δεξιά υποσυστοιχία περιέχει μια υποσυστοιχία με το μέγιστο άθροισμα, και στη γραμμή 10 επιστρέφεται αυτή η μέγιστη υποσυστοιχία. Αν ούτε η αριστερή ούτε η δεξιά υποσυστοιχία δεν περιέχει μια υποσυστοιχία με το μέγιστο άθροισμα, τότε μια μέγιστη υποσυστοιχία θα πρέπει να βρίσκεται εκατέρωθεν του μέσου σημείου· στη γραμμή 11 επιστρέφεται μια τέτοια υποσυστοιχία.

Ανάλυση του αλγορίθμου «διαίρει-και-κυρίευε»

Στη συνέχεια θα καταστρώσουμε μια αναδρομική σχέση που περιγράφει τον χρόνο εκτέλεσης της αναδρομικής διαδικασίας Εύρεση Μέγιστης Υποσυστοιχίας. Όπως κάναμε και στην ανάλυση της συγχωνευτικής ταξινόμησης στην Ενότητα 2.3.2, υποθέτουμε για λόγους απλότητας ότι το μέγεθος του αρχικού προβλήματος είναι μια δύναμη του 2, και επομένως τα μεγέθη όλων των υποπροβλημάτων είναι ακέραιοι αριθμοί. Έστω $T(n)$ ο χρόνος εκτέλεσης της Εύρεσης Μέγιστης Υποσυστοιχίας για μια υποσυστοιχία με n στοιχεία. Κατ' αρχήν, η γραμμή 1 απαιτεί σταθερό χρόνο. Η στοιχειώδης περίπτωση, $n = 1$, είναι απλή: η γραμμή 2 απαιτεί σταθερό χρόνο, και επομένως

$$T(1) = \Theta(1) \,. \tag{4.5}$$

Όταν $n > 1$, έχουμε την αναδρομική περίπτωση. Οι γραμμές 1 και 3 απαιτούν σταθερό χρόνο. Καθένα από τα υποπροβλήματα που επιλύονται στις γραμμές 4 και 5 αφορά μια υποσυστοιχία με $n/2$ στοιχεία (η παραδοχή μας ότι το μέγεθος του αρχικού προβλήματος είναι δύναμη του 2 εξασφαλίζει ότι το $n/2$ είναι ακέραιος αριθμός), και επομένως για να επιλυθεί καθένα από αυτά απαιτείται χρόνος $T(n/2)$. Επειδή έχουμε να λύσουμε δύο υποπροβλήματα –για την αριστερή και για τη δεξιά υποσυστοιχία– οι γραμμές 4 και 5 συνεισφέρουν στον χρόνο εκτέλεσης μια ποσότητα $2T(n/2)$. Όπως έχουμε ήδη δει, η κλήση της Ευρεση Μεγιστης Εκατερωθεν Υποσυστοιχιας στη γραμμή 6 απαιτεί χρόνο $\Theta(n)$. Οι γραμμές 7–11 απαιτούν χρόνο μόλις $\Theta(1)$. Επομένως, για την αναδρομική περίπτωση έχουμε τη σχέση

$$\begin{aligned} T(n) &= \Theta(1) + 2T(n/2) + \Theta(n) + \Theta(1) \\ &= 2T(n/2) + \Theta(n) \, . \end{aligned} \tag{4.6}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (4.5) και (4.6) παίρνουμε μια αναδρομική σχέση για τον χρόνο εκτέλεσης $T(n)$ της Ευρεση Μεγιστης Υποσυστοιχιας:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{εάν } n = 1 \, , \\ 2T(n/2) + \Theta(n) & \text{εάν } n > 1 \, . \end{cases} \tag{4.7}$$

Η αναδρομική αυτή σχέση είναι η ίδια με τη σχέση (4.1) της συγχωνευτικής ταξινόμησης. Όπως θα δούμε όταν εξετάσουμε τη μέθοδο του κυρίαρχου όρου, στην Ενότητα 4.5, η σχέση αυτή έχει λύση $T(n) = \Theta(n \lg n)$. Για να καταλάβετε γιατί η λύση πρέπει να είναι $T(n) = \Theta(n \lg n)$, μπορείτε να ανατρέξετε στο δέντρο αναδρομής του Σχήματος 2.5.

Βλέπουμε λοιπόν ότι με τη μέθοδο διαίρει-και-κυρίευε προκύπτει ένας αλγόριθμος ασυμπτωτικά ταχύτερος από την «εξαντλητική» μέθοδο. Τόσο η συγχωνευτική ταξινόμηση όσο και το πρόβλημα της μέγιστης υποσυστοιχίας μας δίνουν μια ιδέα του πόσο ισχυρή μπορεί να είναι η μέθοδος διαίρει-και-κυρίευε. Μερικές φορές δίνει τον ασυμπτωτικά ταχύτερο δυνατό αλγόριθμο για κάποιο πρόβλημα· άλλες φορές, όμως, υπάρχουν και καλύτερες λύσεις. Όπως θα δείτε στην Άσκηση 4.1-5, για το πρόβλημα της μέγιστης υποσυστοιχίας υπάρχει στην πραγματικότητα αλγόριθμος γραμμικού χρόνου, ο οποίος δεν χρησιμοποιεί τη μέθοδο διαίρει-και-κυρίευε.

Ασκήσεις

4.1-1

Τι επιστρέφει η Ευρεση Μεγιστης Υποσυστοιχιας όταν όλα τα στοιχεία της A είναι αρνητικά;

4.1-2

Γράψτε ψευδοκώδικα για την εξαντλητική μέθοδο επίλυσης του προβλήματος της μέγιστης υποσυστοιχίας. Η διαδικασία σας θα πρέπει να έχει χρόνο εκτέλεσης $\Theta(n^2)$.

4.1-3

Υλοποιήστε στον υπολογιστή σας τον αλγόριθμο εξαντλητικού τύπου και τον αναδρομικό αλγόριθμο για το πρόβλημα της μέγιστης υποσυστοιχίας. Ποιο μέγεθος προβλήματος n_0 αντιστοιχεί στο «σημείο καμπής», στο οποίο ο αναδρομικός αλγόριθμος ξεπερνά τον εξαντλητικό; Αφού το βρείτε, τροποποιήστε τη στοιχειώδη περίπτωση του αναδρομικού αλγορίθμου έτσι ώστε όταν το μέγεθος του προβλήματος είναι μικρότερο του n_0 να χρησιμοποιεί τον εξαντλητικό αλγόριθμο. Με την τροποποίηση αυτή αλλάζει το σημείο καμπής;