database systems

Κεφάλαιο 5

Αλγεβρικές και λογικές γλώσσες ερωτημάτων

Θα στρέψουμε τώρα την προσοχή μας από την προτυποποίηση στον προγραμματισμό των σχεσιακών βάσεων δεδομένων. Θα ξεκινήσουμε με δύο αφηρημένες γλώσσες προγραμματισμού, μία αλγεβρική και μία λογικοκεντρική. Η αλγεβρική γλώσσα προγραμματισμού, η σχεσιακή άλγεβρα, παρουσιάστηκε στην Ενότητα 2.4 προκειμένου να αντιληφθούμε πώς είναι σε γενικές γραμμές οι πράξεις στο σχεσιακό πρότυπο. Υπάρχουν όμως πολλά στοιχεία της σχεσιακής άλγεβρας που δεν έχουμε εξετάσει ακόμα. Στο κεφάλαιο αυτό, θα επεκτείνουμε την άλγεβρα συνόλων της Ενότητας 2.4 σε σάκους, οι οποίοι αποτυπώνουν καλύτερα τον τρόπο με τον οποίο το σχεσιακό πρότυπο υλοποιείται στην πράξη. Θα επεκτείνουμε επίσης την άλγεβρα προκειμένου να μπορεί να χειριστεί περισσότερες πράξεις από αυτές που έχουμε περιγράψει μέχρι τώρα· θα δούμε, για παράδειγμα, πώς υπολογίζουμε συγκεντρωτικά στοιχεία (π.χ. μέσους όρους) για ολόκληρες στήλες μιας σχέσης.

Θα ολοκληρώσουμε το κεφάλαιο παρουσιάζοντας μια άλλη μορφή γλώσσας ερωτημάτων, η οποία στηρίζεται στη λογική. Η γλώσσα αυτή ονομάζεται «Datalog» και μας δίνει τη δυνατότητα να διατυπώνουμε ερωτήματα περιγράφοντας τα αποτελέσματα που θέλουμε να έχουν και όχι δημιουργώντας αλγορίθμους για τον υπολογισμό των αποτελεσμάτων, όπως απαιτεί η σχεσιακή άλγεβρα.

5.1 Σχεσιακές πράξεις σε σάκους

Σε αυτήν την ενότητα θα εξετάσουμε σχέσεις που είναι σάκοι (δηλ. πολυσύνολα) και όχι σύνολα. Αυτό σημαίνει ότι θα επιτρέπεται η ίδια πλειάδα να εμφανίζεται περισσότερες από μία φορές σε μια σχέση. Όπως θα δούμε, όταν οι σχέσεις είναι σάκοι πρέπει να γίνουν κάποιες αλλαγές στον τρόπο που ορίζονται ορισμένες σχεσιακές πράξεις. Ας εξετάσουμε αρχικά ένα απλό παράδειγμα με μια σχέση που είναι σάκος αλλά όχι σύνολο.

Παράδειγμα 5.1 : Η σχέση της Εικόνας 5.1 είναι ένας σάκος με πλειάδες. Στη σχέση αυτή, η πλειάδα $(1, 2)$ εμφανίζεται τρεις φορές και η πλειάδα $(3, 4)$ μία. Αν η Εικόνα 5.1 ήταν μια συνολότιμη σχέση, θα χρειαζόταν να απαλείψουμε δύο από τις εμφανίσεις της πλειάδας $(1, 2)$. Σε μια «σακότιμη» σχέση *επιτρέπεται* να εμφανίζεται πολλές φορές η ίδια πλειάδα, αλλά, όπως και στα σύνολα, η διάταξη των πλειάδων δεν έχει σημασία. □

A	*B*
1	2
3	4
1	2
1	2

Εικόνα 5.1: Ένας σάκος

5.1.1 Γιατί χρησιμοποιούμε σάκους;

Όπως αναφέραμε, τα εμπορικά ΣΔΒΔ υλοποιούν σχέσεις που είναι σάκοι και όχι σύνολα. Ένας λόγος για αυτήν την επιλογή είναι ότι ορισμένες σχεσιακές πράξεις πραγματοποιούνται πιο γρήγορα αν χρησιμοποιείται το σακοειδές πρότυπο. Για παράδειγμα:

1. Για να υπολογίσουμε την ένωση δύο σχέσεων θεωρώντας ότι είναι σάκοι, αντιγράφουμε απλώς τη μία σχέση και προσθέτουμε στο αντίγραφο όλες τις πλειάδες της άλλης σχέσης. Δεν χρειάζεται να απαλείψουμε τα διπλοεγγεγραμμένα αντίγραφα μιας πλειάδας που τυχαίνει να βρίσκεται και στις δύο σχέσεις.
2. Όταν προβάλλουμε μια σχέση θεωρώντας ότι είναι σύνολο, τότε, για να είμαστε σίγουροι ότι κάθε προβολή θα εμφανίζεται μόνο μία φορά, πρέπει να συγκρίνουμε κάθε προβολογενή πλειάδα με όλες τις άλλες προβολογενείς πλειάδες. Αν αντιθέτως, το αποτέλεσμα επιτρέπεται να είναι σάκος, τότε απλά προβάλλουμε κάθε πλειάδα χωριστά και την προσθέτουμε στο αποτέλεσμα, χωρίς να τη συγκρίνουμε με τις άλλες προβολογενείς πλειάδες.

A	*B*	*C*
1	2	5
3	4	6
1	2	7
1	2	8

Εικόνα 5.2: Ο σάκος του Παραδείγματος 5.2

Παράδειγμα 5.2: Ο σάκος της Εικόνας 5.1 θα μπορούσε να έχει προκύψει από την προβολή της σχέσης της Εικόνας 5.2 στα γνωρίσματα A και B, υπό την προϋπόθεση ότι το αποτέλεσμα της προβολής επιτρέπεται να είναι σάκος, οπότε δεν απαλείφουμε τη διπλοεγγεγραμμένη[1] πλειάδα $(1, 2)$. Αν είχαμε χρησιμοποιήσει τον συνήθη τελε-

[1] Σ.τ.Μ.: Οι όροι «διπλοεγγεγραμμένη πλειάδα» και «διπλοεγγραφή» αναφέρονται εν γένει στις «πολλαπλές εγγραφές», δηλ. σε οποιοδήποτε πλήθος αντιγράφων μεγαλύτερο από ένα.

στή προβολής της σχεσιακής άλγεβρας, ο οποίος απαλείφει τις διπλοεγγεγραμμένες πλειάδες, το αποτέλεσμα θα ήταν απλώς:

A	B
1	2
3	4

Σημειωτέον ότι το αποτέλεσμα μπορεί να υπολογιστεί ταχύτερα αν θεωρηθεί σάκος, διότι δεν είναι απαραίτητο να συγκρίνουμε τις πλειάδες $(1, 2)$ και $(3, 4)$ με τις πλειάδες που έχουν ήδη κατασκευαστεί από την προβολή. □

Ένας άλλος λόγος για τον οποίο χειριζόμαστε τις σχέσεις ως σάκους και όχι ως σύνολα είναι ότι σε ορισμένες περιπτώσεις η απάντηση που περιμένουμε να λάβουμε μπορεί να υπολογιστεί μόνο αν χρησιμοποιήσουμε, έστω προσωρινά, σάκους. Ορίστε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 5.3 : Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τον μέσο όρο της συνιστώσας A μιας συνολότιμης σχέσης, όπως αυτής στην Εικόνα 5.2. Δεν θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το πρότυπο των συνόλων για να σκεφτούμε την προβολή της σχέσης στο γνώρισμα A. Ως σύνολο, η μέση τιμή του A είναι 2, αφού στην Εικόνα 5.2 υπάρχουν μόνο δύο τιμές για το γνώρισμα A, οι τιμές 1 και 3. Εάν όμως θεωρήσουμε ότι η στήλη A της Εικόνας 5.2 είναι ο σάκος $\{1, 3, 1, 1\}$, τότε λαμβάνουμε τη σωστή μέση τιμή του γνωρίσματος A, που υπολογίζεται από τις τέσσερεις πλειάδες της Εικόνας 5.2, δηλ. την τιμή 1.5. □

5.1.2 Ένωση, τομή και διαφορά σάκων

Οι τρεις αυτές πράξεις πρέπει να οριστούν εκ νέου για τους σάκους. Έστω ότι οι σχέσεις R και S είναι σάκοι, και ότι η πλειάδα t εμφανίζεται n φορές στην R και m φορές στην S. Σημειωτέον ότι τόσο ο n όσο και ο m (ή και οι δύο) μπορούν αν είναι 0. Τότε:

- Στην ένωση σάκων $R \cup S$, η πλειάδα t εμφανίζεται $n + m$ φορές.
- Στην τομή σάκων $R \cap S$, η πλειάδα t εμφανίζεται $\min(n, m)$ φορές.
- Στη διαφορά σάκων $R - S$, η πλειάδα t εμφανίζεται $\max(0, n - m)$ φορές. Δηλαδή, αν η πλειάδα t εμφανίζεται στην R περισσότερες φορές από ό,τι εμφανίζεται στην S, τότε η t θα εμφανίζεται στην $R - S$ όσες φορές εμφανίζεται στην R μείον τις φορές που εμφανίζεται στην S. Αν όμως η t εμφανίζεται στην S τουλάχιστον όσες φορές εμφανίζεται στην R, τότε η πλειάδα t δεν θα εμφανίζεται καθόλου στη διαφορά $R - S$. Σε περιγραφικό επίπεδο, μπορούμε να θεωρούμε ότι κάθε εμφάνιση της t στην S «απαλείφει» μία εμφάνισή της στην R.

Παράδειγμα 5.4 : Έστω R η σχέση της Εικόνας 5.1, δηλ. η R είναι ένας σάκος στον οποίον η πλειάδα $(1, 2)$ εμφανίζεται τρεις φορές και η $(3, 4)$ μία φορά. Έστω S ο σάκος:

A	B
1	2
3	4
3	4
5	6

Η ένωση σάκων $R \cup S$ είναι ένας σάκος στον οποίο η πλειάδα $(1, 2)$ εμφανίζεται τέσσερεις φορές (τρεις φορές από τις εμφανίσεις της στην R και μία από την εμφάνισή της στην S), η $(3, 4)$ τρεις φορές και η $(5, 6)$ μία φορά.

Η τομή σάκων $R \cap S$ είναι ο σάκος:

A	B
1	2
3	4

με μία εμφάνιση καθεμίας από τις πλειάδες $(1, 2)$ και $(3, 4)$. Δηλαδή, η πλειάδα $(1, 2)$ εμφανίζεται τρεις φορές στην R και μία στην S· συνεπώς, αφού $\min(3, 1) = 1$, εμφανίζεται μία φορά στην $R \cap S$. Αντίστοιχα, η πλειάδα $(3, 4)$ εμφανίζεται $\min(1, 2) = 1$ φορά στην $R \cap S$, ενώ η πλειάδα $(5, 6)$, που εμφανίζεται μία φορά στην S αλλά καμία φορά στην R, εμφανίζεται $\min(0, 1) = 0$ φορές στην $R \cap S$. Σε αυτήν την περίπτωση, το αποτέλεσμα τυχαίνει να είναι σύνολο, κάθε σύνολο όμως είναι επίσης και σάκος.

Η διαφορά σάκων $R - S$ είναι ο σάκος:

A	B
1	2
1	2

Αυτό συμβαίνει επειδή η πλειάδα $(1, 2)$ εμφανίζεται τρεις φορές στη σχέση R και μία φορά στην S, επομένως πρέπει να εμφανίζεται $\max(0, 3 - 1) = 2$ φορές στην $R - S$. Η πλειάδα $(3, 4)$ εμφανίζεται μία φορά στην R και δύο φορές στην S, επομένως στην $R - S$ πρέπει να εμφανίζεται $\max(0, 1 - 2) = 0$ φορές. Η R δεν περιέχει άλλες πλειάδες, επομένως δεν μπορούν να υπάρχουν άλλες πλειάδες στην $R - S$.

Ας εξετάσουμε ένα ακόμα παράδειγμα. Η διαφορά σάκων $S - R$ είναι ο σάκος:

A	B
3	4
5	6

Η πλειάδα $(3, 4)$ εμφανίζεται μία φορά στη διαφορά, όσες φορές εμφανίζεται στην S μείον τις φορές που εμφανίζεται στην R, ενώ η πλειάδα $(5, 6)$ εμφανίζεται επίσης μία φορά, για τον ίδιο λόγο. □

5.1.3 Προβολή σάκων

Έχουμε ήδη παρουσιάσει ένα παράδειγμα προβολής σάκων. Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 5.2, στην προβολή, κάθε πλειάδα εξετάζεται ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες. Αν R είναι ο σάκος της Εικόνας 5.2 και υπολογίσουμε την προβολή σάκων $\pi_{A,B}(R)$, τότε λαμβάνουμε τον σάκο της Εικόνας 5.1.

Αν λόγω της απαλοιφής ενός η περισσοτέρων γνωρισμάτων κατά την προβολή πολλές πλειάδες δημιουργούν την ίδια πλειάδα, αυτές οι διπλοεγγεγραμμένες πλειάδες δεν απαλείφονται από το τελικό αποτέλεσμα της προβολής σάκων. Π.χ., αν οι τρεις πλειάδες $(1, 2, 5)$, $(1, 2, 7)$ και $(1, 2, 8)$ της σχέσης R από την Εικόνα 5.2 προβληθούν στα γνωρίσματα A και B, τότε θα δώσουν όλες την πλειάδα $(1, 2)$. Στην προβολή σάκων θα υπάρχουν τρεις εμφανίσεις της πλειάδας $(1, 2)$ στο αποτέλεσμα, ενώ στην προβολή συνόλων μόνο μία εμφάνιση.

Πράξεις σάκων σε σύνολα

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο σύνολα R και S. Μπορούμε να σκεφτόμαστε κάθε σύνολο ως σάκο· απλώς στον σάκο αυτόν τυχαίνει κάθε στοιχείο να εμφανίζεται μόνο μία φορά. Ας υπολογίσουμε την τομή $R \cap S$, χειριζόμενοι τα R και S ως σάκους και όχι ως σύνολα, χρησιμοποιώντας δηλαδή τον κανόνα τομής σάκων. Το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο με αυτό που θα λαμβάναμε αν είχαμε θεωρήσει τα R και S σύνολα. Αν δηλαδή τα R και S θεωρηθούν σάκοι, μια πλειάδα t ανήκει στην τομή $R \cap S$ τόσες φορές όσες το ελάχιστο πλήθος εμφανίσεών της στα R και S. Αφού τα R και S είναι σύνολα, η πλειάδα t μπορεί να εμφανίζεται σε αυτά καμία ή μία φορά. Συνεπώς, είτε χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα της τομής για σάκους είτε τον κανόνα για σύνολα, η t θα εμφανίζεται το πολύ μία φορά στην τομή $R \cap S$, και μάλιστα θα εμφανίζεται μία φορά εάν και μόνο εάν βρίσκεται και στα δύο σύνολα R και S. Αντίστοιχα, αν χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα διαφοράς σάκων για να υπολογίσουμε τις διαφορές $R - S$ και $S - R$, το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο με εκείνο που θα προέκυπτε και αν χρησιμοποιούσαμε τον κανόνα διαφοράς συνόλων.

Παρ' όλα αυτά, η πράξη της ένωσης λειτουργεί διαφορετικά, ανάλογα με το αν θεωρούμε τα R και S σάκους ή σύνολα. Αν χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα των σάκων για να υπολογίσουμε την ένωση $R \cup S$, τότε το αποτέλεσμα ίσως να μην είναι σύνολο, ακόμα και αν τα R και S είναι σύνολα. Πιο συγκεκριμένα, αν η t εμφανίζεται και στο R και στο S, τότε η t θα πρέπει να εμφανιστεί δύο φορές στην ένωση $R \cup S$ αν χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα των σάκων, και μία μόνο φορά αν χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα των συνόλων.

5.1.4 Επιλογή σε σάκους

Για να εφαρμοστεί μια επιλογή σε έναν σάκο, απλώς εφαρμόζεται η συνθήκη επιλογής σε κάθε πλειάδα, ανεξάρτητα από τις άλλες. Όπως ισχύει πάντοτε με τους σάκους, στο τελικό αποτέλεσμα δεν απαλείφουμε τις διπλοεγγεγραμμένες πλειάδες.

Παράδειγμα 5.5 : Αν R είναι ο σάκος:

A	B	C
1	2	5
3	4	6
1	2	7
1	2	7

τότε το αποτέλεσμα της σακοειδούς επιλογής $\sigma_{C \geq 6}(R)$ είναι:

A	B	C
3	4	6
1	2	7
1	2	7

Αλγεβρικοί νόμοι για σάκους

Ένας αλγεβρικός νόμος είναι μια ισοδυναμία μεταξύ δύο εκφράσεων σχεσιακής άλγεβρας των οποίων τα ορίσματα είναι μεταβλητές που συμβολίζουν σχέσεις. Σύμφωνα με την ισοδυναμία, όποιες σχέσεις και αν βάλουμε στη θέση αυτών των μεταβλητών, οι δύο εκφράσεις θα ορίζουν την ίδια σχέση. Παράδειγμα ενός πολύ γνωστού νόμου είναι ο νόμος της αντιμεταθετικότητας της ένωσης: $R \cup S = S \cup R$. Ο νόμος αυτός τυχαίνει να ισχύει ανεξάρτητα από το αν θεωρούμε ότι οι σχέσεις-μεταβλητές R και S είναι σύνολα ή σάκοι. Υπάρχουν όμως άλλοι νόμοι της σχεσιακής άλγεβρας που ισχύουν όταν η σχεσιακή άλγεβρα εφαρμόζεται σε σύνολα, και δεν ισχύουν όταν οι σχέσεις θεωρούνται σάκοι. Ένα απλό παράδειγμα τέτοιου νόμου είναι ο επιμεριστικός νόμος της διαφοράς συνόλων επί της ένωσης: $(R \cup S) - T = (R - T) \cup (S - T)$. Ο νόμος αυτός ισχύει για σύνολα, όχι όμως για σάκους. Για να δούμε για ποιο λόγο δεν ισχύει για σάκους, ας υποθέσουμε ότι οι σχέσεις R, S και T περιέχουν από ένα αντίγραφο της πλειάδας t. Τότε η έκφραση στο αριστερό μέλος περιέχει ένα αντίγραφο της t, ενώ η έκφραση στο δεξί μέλος δεν περιέχει κανένα. Αν θεωρούσαμε ότι οι σχέσεις R, S και T είναι σύνολα, τότε κανένα από τα δύο μέλη δεν θα περιείχε την t. Θα μελετήσουμε περισσότερο τους αλγεβρικούς νόμους που ισχύουν για σάκους στις Ασκήσεις 5.1.4 και 5.1.5.

Δηλαδή, όλες οι πλειάδες, πλην της πρώτης, ικανοποίησαν τη συνθήκη της επιλογής. Στο αποτέλεσμα συμπεριλαμβάνονται και οι δύο τελευταίες πλειάδες, που αποτελούν διπλοεγγραφές στον σάκο R. □

5.1.5 Γινόμενο σάκων

Ο κανόνας υπολογισμού του καρτεσιανού γινομένου σάκων δεν παρουσιάζει εκπλήξεις. Κάθε πλειάδα της μιας σχέσης σχηματίζει ζεύγος με κάθε πλειάδα της άλλης, ασχέτως του εάν κάποια από αυτές είναι διπλοεγγεγραμμένη ή όχι. Κατά συνέπεια, αν η πλειάδα r εμφανίζεται στη σχέση R m φορές, και η πλειάδα s εμφανίζεται στη σχέση S n φορές, τότε η πλειάδα rs εμφανίζεται mn φορές στο γινόμενο $R \times S$.

Παράδειγμα 5.6: Έστω R και S οι σάκοι που φαίνονται στην Εικόνα 5.3. Το γινόμενο $R \times S$ αποτελείται από έξι πλειάδες, όπως φαίνεται στην Εικόνα 5.3(γ). Σημειωτέον ότι η συνήθης σύμβαση για τα ονόματα των γνωρισμάτων που παρουσιάσαμε στο πλαίσιο των σχέσεων-συνόλων ισχύει και για τις σχέσεις-σάκους. Συνεπώς, το γνώρισμα B, που ανήκει και στις δύο σχέσεις R και S, εμφανίζεται δύο φορές στο γινόμενο, έχοντας ως πρόθημα κάθε φορά το όνομα μίας από τις δύο σχέσεις. □

5.1.6 Συνένωση σάκων

Η συνένωση σάκων επίσης δεν παρουσιάζει εκπλήξεις. Συγκρίνουμε κάθε πλειάδα της μιας σχέσης με κάθε πλειάδα της άλλης, και αποφασίζουμε αν αυτό το ζεύγος πλειά-

A	B
1	2
1	2

(α) Η σχέση R

B	C
2	3
4	5
4	5

(β) Η σχέση S

A	$R.B$	$S.B$	C
1	2	2	3
1	2	2	3
1	2	4	5
1	2	4	5
1	2	4	5
1	2	4	5

(γ) Το γινόμενο σάκων $R \times S$

Εικόνα 5.3: Ο υπολογισμός του γινομένου σάκων

δων συνενώνεται επιτυχώς ή όχι. Εάν ναι, τότε συμπεριλαμβάνουμε στο αποτέλεσμα την πλειάδα που προκύπτει από τη συνένωση, χωρίς να απαλείφουμε τις διπλοεγγεγραμμένες πλειάδες.

Παράδειγμα 5.7 : Η φυσική συνένωση $R \bowtie S$ των σχέσεων R και S της Εικόνας 5.3 είναι:

A	B	C
1	2	3
1	2	3

Δηλαδή, η πλειάδα $(1,2)$ της R συνενώνεται με την $(2,3)$ της S. Επειδή η πλειάδα $(1,2)$ εμφανίζεται δύο φορές στην R και η πλειάδα $(2,3)$ εμφανίζεται μία φορά στην S, υπάρχουν δύο ζεύγη πλειάδων που όταν συνενώνονται δημιουργούν την πλειάδα $(1,2,3)$. Δεν υπάρχουν άλλες πλειάδες στις σχέσεις R και S που να μπορούν να συνενωθούν επιτυχώς.

Ας εξετάσουμε ένα ακόμα παράδειγμα για τις ίδιες σχέσεις R και S: ας υπολογίσουμε τη συνένωση θ:

$$R \underset{R.B<S.B}{\bowtie} S$$

Το αποτέλεσμα της συνένωσης θ είναι ο σάκος:

A	*R.B*	*S.B*	*C*
1	2	4	5
1	2	4	5
1	2	4	5
1	2	4	5

Η συνένωση αυτή υπολογίζεται ως εξής. Η πλειάδα $(1, 2)$ της R και η $(4, 5)$ της S ικανοποιούν τη συνθήκη της συνένωσης. Αφού και οι δύο εμφανίζονται δύο φορές στις αρχικές τους σχέσεις, η συνενωσιγενής πλειάδα εμφανίζεται στο αποτέλεσμα 2×2, δηλαδή 4 φορές. Το άλλο ζεύγος πλειάδων που θα μπορούσαν να συνενωθούν –η $(1, 2)$ της R με την $(2, 3)$ της S– δεν ικανοποιεί τη συνθήκη της συνένωσης και έτσι ο συνδυασμός τους δεν συμπεριλαμβάνεται στο αποτέλεσμα. □

5.1.7 Ασκήσεις για την Ενότητα 5.1

Άσκηση 5.1.1 : Έστω `PC` η σχέση της Εικόνας 2.21(α), και ας υποθέσουμε ότι υπολογίζουμε την προβολή π_{speed}(`PC`). Ποια είναι η τιμή της έκφρασης αυτής ως σύνολο; Ως σάκος; Ποια είναι η μέση τιμή των πλειάδων σε αυτήν την προβολή αν θεωρηθεί σύνολο, και ποια αν θεωρηθεί σάκος;

Άσκηση 5.1.2 : Επαναλάβετε την Άσκηση 5.1.1 για την προβολή π_{hd}(`PC`).

Άσκηση 5.1.3 : Η άσκηση αυτή αναφέρεται στις σχέσεις με τα πολεμικά πλοία της Άσκησης 2.4.3.

α) Η έκφραση π_{bore}(`Classes`) δημιουργεί μια μονόστηλη σχέση με τα διαμετρήματα των πυροβόλων (το γνώρισμα «bore») των διαφόρων κλάσεων πλοίων. Με βάση τα δεδομένα της Άσκησης 2.4.3 ποια είναι αυτή η σχέση αν τη θεωρήσουμε σύνολο και ποια αν τη θεωρήσουμε σάκο;

! β) Γράψτε μια έκφραση σχεσιακής άλγεβρας που να δίνει τα διαμετρήματα των πυροβόλων των πλοίων (όχι των κλάσεων). Η έκφρασή σας θα πρέπει να δίνει τη σωστή απάντηση για σχέσεις-σάκους· δηλαδή, η τιμή b θα πρέπει να εμφανίζεται τόσες φορές όσο και το πλήθος των πλοίων που έχουν πυροβόλα με διαμέτρημα b.

! **Άσκηση 5.1.4 :** Ορισμένοι αλγεβρικοί νόμοι για τις σχέσεις ως σύνολα ισχύουν επίσης αν θεωρήσουμε ότι οι σχέσεις είναι σάκοι. Εξηγήστε ποιοι από τους παρακάτω νόμους ισχύουν τόσο για σύνολα όσο και για σάκους.

α) Ο προσεταιριστικός νόμος για την ένωση: $(R \cup S) \cup T = R \cup (S \cup T)$.

β) Ο προσεταιριστικός νόμος για την τομή: $(R \cap S) \cap T = R \cap (S \cap T)$.

γ) Ο προσεταιριστικός νόμος για τη φυσική συνένωση: $(R \bowtie S) \bowtie T = R \bowtie (S \bowtie T)$.

δ) Ο αντιμεταθετικός νόμος για την ένωση: $(R \cup S) = (S \cup R)$.

ε) Ο αντιμεταθετικός νόμος για την τομή: $(R \cap S) = (S \cap R)$.

στ) Ο αντιμεταθετικός νόμος για τη φυσική συνένωση: $(R \bowtie S) = (S \bowtie R)$.

ζ) $\pi_L(R \cup S) = \pi_L(R) \cup \pi_L(S)$, όπου L ένας αυθαίρετος κατάλογος γνωρισμάτων.

η) Ο επιμεριστικός νόμος της ένωσης επί της τομής:

$$R \cup (S \cap T) = (R \cup S) \cap (R \cup T)$$

θ) $\sigma_{C \text{ AND } D}(R) = \sigma_C(R) \cap \sigma_D(R)$, όπου C και D αυθαίρετες συνθήκες για τις πλειάδες της σχέσης R.

!! **Άσκηση 5.1.5 :** Οι ακόλουθοι αλγεβρικοί νόμοι ισχύουν για σύνολα, όχι όμως για σάκους. Εξηγήστε γιατί ισχύουν για σύνολα και δώστε αντιπαραδείγματα για να καταδείξετε ότι δεν ισχύουν για σάκους.

α) $(R \cap S) - T = R \cap (S - T)$.

β) Ο επιμεριστικός νόμος της τομής επί της ένωσης:

$$R \cap (S \cup T) = (R \cap S) \cup (R \cap T)$$

γ) $\sigma_{C \text{ OR } D}(R) = \sigma_C(R) \cup \sigma_D(R)$, όπου C και D αυθαίρετες συνθήκες για τις πλειάδες της σχέσης R.

5.2 Επεκτεταμένοι τελεστές της σχεσιακής άλγεβρας

Στην Ενότητα 2.4 παρουσιάσαμε την κλασική σχεσιακή άλγεβρα, ενώ στην Ενότητα 5.1 εισαγάγαμε τις τροποποιήσεις που είναι απαραίτητες για να χειριζόμαστε τις σχέσεις ως σάκους αντί για σύνολα. Οι ιδέες που παρουσιάστηκαν σε αυτές τις δύο ενότητες αποτελούν το θεμέλιο των περισσοτέρων σύγχρονων γλωσσών ερωτημάτων. Παρ' όλα αυτά, γλώσσες όπως η SQL χρησιμοποιούν και πρόσθετες πράξεις που έχουν αποδειχθεί αρκετά σημαντικές στις εφαρμογές. Συνεπώς, για να είναι η παρουσίαση των σχεσιακών πράξεων ολοκληρωμένη πρέπει να συμπεριλάβει και κάποιους ακόμα τελεστές, τους οποίους θα παρουσιάσουμε σε αυτήν την ενότητα. Οι νέοι τελεστές που παρουσιάζουμε είναι οι εξής:

1. Ο τελεστής *απαλοιφής διπλοεγγραφών*, δ, μετατρέπει έναν σάκο σε σύνολο, απαλείφοντας τα αντίγραφα των πλειάδων που εμφανίζονται πολλές φορές και κρατώντας μόνο ένα από αυτά.

2. Οι *συγκεντρωτικοί τελεστές*, όπως οι τελεστές για τον υπολογισμό αθροισμάτων ή μέσων τιμών, δεν συγκαταλέγονται στους τελεστές της σχεσιακής άλγεβρας, χρησιμοποιούνται όμως από τον τελεστή ομαδοποίησης (που περιγράφεται αμέσως παρακάτω). Οι συγκεντρωτικοί τελεστές εφαρμόζονται σε γνωρίσματα (δηλ. στήλες) μιας σχέσης: π.χ., το άθροισμα μιας στήλης δίνει ως αποτέλεσμα έναν αριθμό που ισούται με το άθροισμα όλων των τιμών που εμφανίζονται σε αυτήν τη στήλη.

3. Η *ομαδοποίηση* πλειάδων σύμφωνα με την τιμή τους σε ένα ή περισσότερα γνωρίσματα διαμερίζει τις πλειάδες μιας σχέσης σε «ομάδες». Στις στήλες κάθε τέτοιας ομάδας μπορούν να εφαρμοστούν στη συνέχεια συγκεντρωτικοί τελεστές.

Με τον τρόπο αυτό έχουμε τη δυνατότητα να διατυπώσουμε ερωτήματα που δεν μπορούν να εκφραστούν στην κλασική σχεσιακή άλγεβρα. Ο *τελεστής ομαδοποίησης*, γ, συνδυάζει τα αποτελέσματα της ομαδοποίησης και των συγκεντρωτικών τελεστών.

4. Η *επεκτεταμένη προβολή* προσδίδει νέα χαρακτηριστικά στον τελεστή προβολής π. Εκτός από την διαγραφή κάποιων στηλών μέσω προβολής, ο τελεστής π στη γενικευμένη του μορφή μπορεί να πραγματοποιήσει υπολογισμούς με βάση τις στήλες της σχέσης την οποία δέχεται ως όρισμα και να δημιουργήσει νέες στήλες.

5. Ο *τελεστής ταξινόμησης*, τ, μετατρέπει μια σχέση σε κατάλογο πλειάδων, ταξινομημένων ως προς ένα ή περισσότερα γνωρίσματα. Η χρήση αυτού του τελεστή απαιτεί προσοχή, διότι ορισμένοι τελεστές της σχεσιακής άλγεβρας δεν έχουν νόημα όταν εφαρμόζονται σε καταλόγους. Μπορούμε, παρ' όλα αυτά, να εφαρμόσουμε τον τελεστή της επιλογής ή της προβολής σε καταλόγους και να αναμένουμε η διάταξη των στοιχείων του καταλόγου να διατηρηθεί στην έξοδο.

6. Ο τελεστής της *εξωτερικής συνένωσης* είναι μια παραλλαγή του τελεστή της συνένωσης, που αποφεύγει την απώλεια των μετέωρων πλειάδων. Στο αποτέλεσμα της εξωτερικής συνένωσης, οι μετέωρες πλειάδες «συμπληρώνονται» με την κενή τιμή, ώστε να μπορούν να συμπεριληφθούν στο αποτέλεσμα.

5.2.1 Απαλοιφή διπλοεγγραφών

Κάποιες φορές χρειαζόμαστε έναν τελεστή που να μετατρέπει έναν σάκο σε σύνολο. Για τον σκοπό αυτόν, χρησιμοποιούμε τον τελεστή $\delta(R)$, που επιστρέφει ένα σύνολο που αποτελείται από ένα μόνο αντίγραφο κάθε πλειάδας από όσες εμφανίζονται μία ή περισσότερες φορές στην R.

Παράδειγμα 5.8 : Αν R είναι η σχέση

A	*B*
1	2
3	4
1	2
1	2

της Εικόνας 5.1, τότε η σχέση $\delta(R)$ είναι:

A	*B*
1	2
3	4

Η πλειάδα $(1, 2)$, που εμφανιζόταν τρεις φορές στη σχέση R, εμφανίζεται μόνο μία φορά στην $\delta(R)$. □

5.2.2 Συγκεντρωτικοί τελεστές

Υπάρχουν διάφοροι τελεστές που εφαρμόζονται σε σύνολα ή σε σάκους αριθμών ή συμβολοσειρών για να συνοψίσουν ή να υπολογίσουν «συγκεντρωτικά» στοιχεία για τις τιμές που περιέχονται σε μια στήλη· γι' αυτό ονομάζονται *συγκεντρωτικοί τελεστές*. Οι συνηθέστεροι τελεστές αυτού του τύπου είναι οι εξής:

1. Ο τελεστής `SUM` υπολογίζει το άθροισμα μιας στήλης με αριθμητικές τιμές.
2. Ο τελεστής `AVG` (από το average = «μέσος όρος») υπολογίζει τη μέση τιμή μιας στήλης με αριθμητικές τιμές.
3. Οι τελεστές `MIN` και `MAX`, όταν εφαρμόζονται σε μια στήλη με αριθμητικές τιμές, υπολογίζουν την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή, αντίστοιχα. Όταν εφαρμόζονται σε μια στήλη με συμβολοσειρές, τότε υπολογίζουν τη λεξικογραφικά (αλφαβητικά) πρώτη ή τελευταία τιμή, αντίστοιχα.
4. Ο τελεστής καταμέτρησης, `COUNT`, υπολογίζει το πλήθος των (όχι απαραίτητα διακριτών) τιμών σε μια στήλη. Ισοδύναμα, όταν ο τελεστής `COUNT` εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε γνώρισμα μιας σχέσης, υπολογίζει το πλήθος των πλειάδων της σχέσης, προσμετρώντας και τις διπλοεγγραφές.

Παράδειγμα 5.9 : Έστω η σχέση:

A	*B*
1	2
3	4
1	2
1	2

Κάποια παραδείγματα συγκεντρωτικών στοιχείων για αυτήν τη σχέση είναι τα εξής:

1. `SUM(B)` = $2 + 4 + 2 + 2 = 10$.
2. `AVG(A)` = $(1 + 3 + 1 + 1)/4 = 1.5$.
3. `MIN(A)` = 1.
4. `MAX(B)` = 4.
5. `COUNT(A)` = 4. □

5.2.3 Ομαδοποίηση

Συχνά δεν θέλουμε απλώς να υπολογίσουμε τη μέση τιμή ή κάποιο άλλο συγκεντρωτικό στοιχείο για μια ολόκληρη στήλη, αλλά θέλουμε να εξετάσουμε τις πλειάδες μιας σχέσης κατά ομάδες, ανάλογα με την τιμή τους σε μία ή περισσότερες στήλες, και να υπολογίσουμε συγκεντρωτικά στοιχεία για κάθε ομάδα ξεχωριστά. Ας υποθέσουμε π.χ. ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τη συνολική διάρκεια σε λεπτά («sumOfLengths») των ταινιών κάθε κινηματογραφικής εταιρείας, να δημιουργήσουμε δηλαδή μια σχέση με τη μορφή:

studioName	*sumOfLengths*
Disney	12345
MGM	54321
...	...

Ξεκινώντας από τη σχέση

```
Movies(title, year, length, genre, studioName, producerC#)
```

από το σχήμα ΒΔ της Ενότητας 2.2.8 που χρησιμοποιούμε στα παραδείγματά μας, ομαδοποιούμε τις πλειάδες με βάση την τιμή τους στο γνώρισμα `studioName`. Στη συνέχεια, πρέπει να αθροίσουμε τη στήλη `length` για κάθε ομάδα ξεχωριστά. Φανταζόμαστε δηλαδή ότι οι πλειάδες της σχέσης `Movies` είναι ομαδοποιημένες με τον τρόπο που φαίνεται στην Εικόνα 5.4, και ότι εφαρμόζουμε τον συγκεντρωτικό τελεστή `SUM(length)` σε κάθε ομάδα ανεξάρτητα από τις άλλες.

	studioName	
	Disney	
	Disney	
	Disney	
	MGM	
	MGM	
	○	
	○	
	○	

Εικόνα 5.4: Μια σχέση και ένας φανταστικός διαμερισμός της σε ομάδες

5.2.4 Ο τελεστής ομαδοποίησης

Θα παρουσιάσουμε τώρα έναν τελεστή που μας επιτρέπει να ομαδοποιούμε τις πλειάδες μιας σχέσης και/ή να υπολογίζουμε συγκεντρωτικά στοιχεία για κάποιες από τις στήλες της. Όταν έχει γίνει η ομαδοποίηση, τότε ο υπολογισμός των συγκεντρωτικών στοιχείων πραγματοποιείται για κάθε ομάδα ξεχωριστά.

Με τον τελεστή γ, χρησιμοποιείται ως υποδείκτης (δηλ. κάτω δείκτης) ένας κατάλογος L, κάθε στοιχείο του οποίου είναι ένα από τα εξής:

α) Ένα γνώρισμα της σχέσης R, στην οποία εφαρμόζεται ο τελεστής γ. Το γνώρισμα αυτό είναι ένα από τα γνωρίσματα βάσει των οποίων θα γίνει η ομαδοποίηση των πλειάδων της R. Το στοιχείο αυτό ονομάζεται *ομαδοποιό γνώρισμα*.

β) Ένας συγκεντρωτικός τελεστής που εφαρμόζεται σε ένα γνώρισμα της σχέσης. Για να ορίσουμε ένα όνομα για το γνώρισμα που θα αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη συγκεντρωτική πράξη, γράφουμε μετά τον συγκεντρωτικό τελεστή ένα βέλος και ένα νέο όνομα. Το γνώρισμα αυτό ονομάζεται *συγκεντρωτικό γνώρισμα*.

Η σχέση που επιστρέφει η έκφραση $\gamma_L(R)$ κατασκευάζεται ως εξής:

1. Διαμερίζουμε τις πλειάδες της R σε *ομάδες*. Κάθε ομάδα αποτελείται από όσες πλειάδες έχουν ένα συγκεκριμένο σύνολο τιμών στα ομαδοποιά γνωρίσματα του καταλόγου L. Εάν δεν υπάρχουν ομαδοποιά γνωρίσματα, τότε ολόκληρη η σχέση R θεωρείται μία ομάδα.

2. Για κάθε ομάδα δημιουργούμε μία πλειάδα που αποτελείται από:

Ο τελεστής δ είναι ειδική περίπτωση του τελεστή γ

Από τεχνική άποψη, ο τελεστής δ περιττεύει. Για κάθε σχέση $R(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, η πράξη $\delta(R)$ ισοδυναμεί με την $\gamma_{A_1,A_2,\ldots,A_n}(R)$. Για την απαλοιφή δηλαδή των διπλοεγγραφών ομαδοποιούμε ως προς όλα τα γνωρίσματα της σχέσης και δεν εκτελούμε καμία συγκεντρωτική πράξη. Κάθε ομάδα αντιστοιχεί σε μια πλειάδα που εμφανίζεται μία ή περισσότερες φορές στην R. Αφού το αποτέλεσμα του τελεστή γ περιέχει ακριβώς μία πλειάδα από κάθε ομάδα, το αποτέλεσμα αυτής της «ομαδοποίησης» είναι η απαλοιφή των διπλοεγγραφών. Επειδή όμως ο τελεστής δ εμφανίζεται πολύ συχνά και είναι ιδιαίτερα σημαντικός, θα συνεχίσουμε να τον εξετάζουμε ξεχωριστά κατά τη μελέτη των αλγεβρικών νόμων και αλγορίθμων για την υλοποίηση των τελεστών.

Μπορεί κανείς επίσης να θεωρήσει τον τελεστή γ ως μια επέκταση του τελεστή προβολής σε σύνολα. Δηλαδή, αν η σχέση R είναι σύνολο, τότε η πράξη $\gamma_{A_1,A_2,\ldots,A_n}(R)$ ισοδυναμεί με την $\pi_{A_1,A_2,\ldots,A_n}(R)$. Αν όμως η σχέση R είναι σάκος, τότε ο τελεστής γ απαλείφει τις διπλοεγγραφές, ενώ ο π όχι.

i. Τις τιμές των ομαδοποιών γνωρισμάτων για αυτήν την ομάδα.

ii. Τις συγκεντρωτικές τιμές που προκύπτουν από όλες τις πλειάδες αυτής της ομάδας για τα συγκεντρωτικά γνωρίσματα του καταλόγου L.

Παράδειγμα 5.10 : Έστω η σχέση:

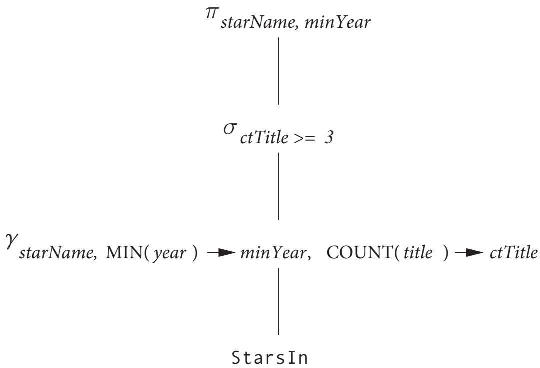
```
StarsIn(title, year, starName)
```

Επιθυμούμε να πληροφορηθούμε για κάθε ηθοποιό που έχει εμφανιστεί σε τρεις τουλάχιστον ταινίες, ποιο είναι το έτος κυκλοφορίας της παλαιότερης από αυτές. Το πρώτο βήμα είναι να ομαδοποιήσουμε τη σχέση, με ομαδοποιό γνώρισμα το `starName`. Στη συνέχεια, πρέπει προφανώς να υπολογίσουμε για κάθε ομάδα το συγκεντρωτικό στοιχείο `MIN(year)`. Για να διαπιστώσουμε όμως ποιες ομάδες ικανοποιούν τη συνθήκη ότι ο ηθοποιός πρέπει να έχει εμφανιστεί σε τρεις τουλάχιστον ταινίες, πρέπει επίσης να υπολογίσουμε για κάθε ομάδα ξεχωριστά το συγκεντρωτικό στοιχείο `COUNT(title)`.

Ξεκινάμε με την έκφραση ομαδοποίησης:

$$\gamma_{starName,\ \texttt{MIN}(year)\rightarrow minYear,\ \texttt{COUNT}(title)\rightarrow ctTitle}(\texttt{StarsIn})$$

Για την απάντηση του ερωτήματος, χρειαζόμαστε τις δύο πρώτες στήλες του αποτελέσματος αυτής της έκφρασης. Η τρίτη στήλη είναι ένα βοηθητικό γνώρισμα, το οποίο έχουμε ονομάσει `ctTitle`· το γνώρισμα αυτό είναι απαραίτητο για να προσδιορίσουμε αν ο ηθοποιός έχει εμφανιστεί σε τρεις τουλάχιστον ταινίες. Μπορούμε λοιπόν να συνεχίσουμε την αλγεβρική έκφραση για το ερώτημα με τη συνθήκη επιλογής `ctTitle >= 3` και να προβάλουμε το αποτέλεσμα στις δύο πρώτες στήλες. Στην Εικόνα 5.5 φαίνεται μια δενδροειδής μορφή του ερωτήματος. □



Εικόνα 5.5: Η δενδροειδής μορφή της αλγεβρικής έκφρασης για το ερώτημα του Παραδείγματος 5.10

5.2.5 Η επέκταση του τελεστή προβολής

Ας επανεξετάσουμε τον τελεστή προβολής $\pi_L(R)$ που παρουσιάσαμε αρχικά στην Ενότητα 2.4.5. Στην κλασική σχεσιακή άλγεβρα, ο L είναι ένας κατάλογος (κάποιων) γνωρισμάτων της σχέσης R. Επεκτείνουμε τον τελεστή προβολής δίνοντάς του τη δυνατότητα όχι μόνο να επιλέγει συνιστώσες της σχέσης, αλλά και να εκτελεί πράξεις με τις συνιστώσες των πλειάδων. Στην *επεκτεταμένη προβολή*, που συμβολίζεται επίσης $\pi_L(R)$, ο κατάλογος L της προβολής μπορεί να περιέχει τα ακόλουθα είδη στοιχείων:

1. Ένα μόνο γνώρισμα της R.
2. Μία έκφραση της μορφής $x \to y$, όπου x και y είναι ονόματα γνωρισμάτων. Το στοιχείο $x \to y$ στον κατάλογο L σημαίνει ότι πρέπει να πάρουμε το γνώρισμα x της R και να το *μετονομάσουμε* σε y· δηλ. το όνομα του γνωρίσματος αυτού στο σχήμα της τελικής σχέσης θα είναι y.
3. Μία έκφραση της μορφής $E \to z$, όπου E είναι μια έκφραση που περιέχει γνωρίσματα της R, σταθερές, αριθμητικούς τελεστές και τελεστές συμβολοσειρών, και όπου z είναι ένα νέο όνομα για το γνώρισμα που προκύπτει από τον υπολογισμό της έκφρασης E. Π.χ., η έκφραση $a + b \to x$ ως στοιχείο του καταλόγου L σημαίνει ότι πρέπει να προστεθούν τα γνωρίσματα a και b, και να ονομαστεί το αποτέλεσμα x. Το στοιχείο $c||d \to e$ σημαίνει ότι πρέπει να συναρμοστούν τα γνωρίσματα c και d, που είναι προφανώς συμβολοσειρές, και να ονομαστεί το αποτέλεσμα e.

Για να υπολογιστεί το αποτέλεσμα της προβολής, εξετάζουμε όλες τις πλειάδες της R μία προς μία. Υπολογίζουμε τους όρους του καταλόγου L αντικαθιστώντας τα γνωρίσματα που αναφέρονται στον L με τις τιμές των αντίστοιχων συνιστωσών της εκάστοτε πλειάδας, και εφαρμόζοντας σε αυτές τις τιμές όποιους τελεστές υποδεικνύει ο κατάλογος L. Το αποτέλεσμα είναι μια σχέση, το σχήμα της οποίας περιλαμβάνει τα ονόματα των γνωρισμάτων του καταλόγου L, με τις όποιες μετονομασίες αναφέρονται σε αυτόν. Κάθε πλειάδα της R δημιουργεί μία πλειάδα στο αποτέλεσμα. Οι διπλοεγγεγραμμένες πλειάδες της R δημιουργούν σίγουρα διπλοεγγεγραμμένες πλειάδες στο αποτέλεσμα, το αποτέλεσμα όμως ενδέχεται να περιλαμβάνει διπλοεγγεγραμμένες πλειάδες ακόμα και αν η σχέση R δεν περιέχει διπλοεγγραφές.

Παράδειγμα 5.11 : Έστω R η σχέση:

A	B	C
0	1	2
0	1	2
3	4	5

Το αποτέλεσμα της πράξης $\pi_{A,B+C\to X}(R)$ είναι:

A	X
0	3
0	3
3	9

Το σχεσιακό σχήμα του αποτελέσματος έχει δύο γνωρίσματα. Το πρώτο είναι το A, δηλαδή το πρώτο γνώρισμα της R, που δεν έχει μετονομαστεί. Το δεύτερο είναι το άθροισμα του δεύτερου και του τρίτου γνωρίσματος της R, με το νέο όνομα X.

Ας δούμε και το ακόλουθο παράδειγμα. Η τιμή της $\pi_{B-A\to X,C-B\to Y}(R)$ είναι:

X	Y
1	1
1	1
1	1

Προσέξτε ότι ο υπολογισμός που απαιτείται για αυτόν τον κατάλογο προβολής τυχαίνει να μετατρέπει δύο διαφορετικές πλειάδες, τις $(0, 1, 2)$ και $(3, 4, 5)$, στην ίδια πλειάδα, την $(1, 1)$. Κατά συνέπεια, αυτή η τελευταία πλειάδα εμφανίζεται τρεις φορές στο αποτέλεσμα. □

5.2.6 Ο τελεστής ταξινόμησης

Σε πολλές περιπτώσεις θέλουμε να ταξινομήσουμε τις πλειάδες μιας σχέσης ως προς ένα ή περισσότερα από τα γνωρίσματά της. Συχνά, όταν υποβάλλουμε κάποιο ερώτημα σε μια ΒΔ, θέλουμε η σχέση που προκύπτει ως αποτέλεσμα να είναι ταξινομημένη. Για παράδειγμα, σε ένα ερώτημα που αφορά όλες τις ταινίες στις οποίες έχει παίξει ο Sean Connery, μπορεί να θέλουμε ο κατάλογος των ταινιών να είναι ταξινομημένος ως προς τον τίτλο, ώστε να μπορούμε να βρίσκουμε ευκολότερα αν μια συγκεκριμένη ταινία βρίσκεται σε αυτόν. Όπως θα δούμε επίσης όταν θα εξετάσουμε την βελτιστοποίηση των ερωτημάτων, η διαδικασία απάντησης ενός ερωτήματος από το ΣΔΒΔ συχνά επιταχύνεται αν ταξινομήσουμε αρχικά τις σχέσεις.

Η έκφραση $\tau_L(R)$, όπου R είναι μια σχέση και L ένας κατάλογος κάποιων γνωρισμάτων της R, είναι η ίδια σχέση R, όπου οι πλειάδες είναι ταξινομημένες με βάση τη σειρά που αναφέρεται στον κατάλογο L. Αν ο L είναι ο κατάλογος $A_1, A_2, \ldots, A_n$, τότε οι πλειάδες της R ταξινομούνται πρώτα με βάση την τιμή τους στο γνώρισμα A_1.

Οι πλειάδες που καταλαμβάνουν την ίδια θέση με βάση το γνώρισμα A_1, ταξινομούνται με βάση την τιμή τους στο γνώρισμα A_2. Οι πλειάδες που συμπίπτουν και στα δύο γνωρίσματα A_1 και A_2 διατάσσονται με βάση τις τιμές τους στο γνώρισμα A_3 κ.ο.κ. Οι πλειάδες που καταλαμβάνουν την ίδια θέση μετά και την εξέταση του γνωρίσματος A_n διατάσσονται με τυχαίο τρόπο.

Παράδειγμα 5.12 : Αν R είναι μια σχέση με σχήμα $R(A, B, C)$, τότε η πράξη $\tau_{C,B}(R)$ διατάσσει τις πλειάδες της R με βάση την τιμή του γνωρίσματος C, και όσες πλειάδες έχουν την ίδια τιμή στο γνώρισμα C διατάσσονται με βάση την τιμή τους στο γνώρισμα B. Οι πλειάδες που συμπίπτουν και στα δύο γνωρίσματα C και B διατάσσονται με τυχαίο τρόπο. $\square$

Αν εφαρμόσουμε στο ταξινομημένο αποτέλεσμα του τελεστή τ έναν άλλο τελεστή, όπως τον τελεστή της συνένωσης, συχνά η ταξινομημένη διάταξη παύει να έχει νόημα, και τα στοιχεία του καταλόγου πρέπει να αντιμετωπίζονται ως σάκος και όχι ως κατάλογος. Ωστόσο, μπορούμε να κάνουμε την προβολή σάκων να διατηρεί την ταξινομημένη διάταξη των στοιχείων. Επίσης, η πράξη της επιλογής σε έναν κατάλογο διώχνει τις πλειάδες που δεν ικανοποιούν τη συνθήκη επιλογής, αλλά μπορούμε να κάνουμε τις πλειάδες που απομένουν να εμφανίζονται σύμφωνα με την αρχική τους ταξινομημένη διάταξη.

5.2.7 Εξωτερικές συνενώσεις

Μια ιδιότητα του τελεστή συνένωσης είναι ότι πολλές πλειάδες ενδέχεται να μείνουν «μετέωρες», δηλαδή να μην ταιριάξουν με καμία πλειάδα της άλλης σχέσης στα κοινά τους γνωρίσματα. Οι μετέωρες πλειάδες δεν αφήνουν κανένα ίχνος στο αποτέλεσμα της συνένωσης, και έτσι η συνένωση ενδέχεται να μην αναπαριστά πλήρως τα δεδομένα των αρχικών σχέσεων. Στις περιπτώσεις που αυτό το χαρακτηριστικό είναι ανεπιθύμητο, έχει προταθεί η χρήση μιας παραλλαγής της πράξης της συνένωσης, που ονομάζεται «εξωτερική συνένωση». Η παραλλαγή αυτή χρησιμοποιείται σε πολλά εμπορικά συστήματα.

Θα εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση της «φυσικής» συνένωσης, όπου συνενώνονται οι πλειάδες που συμπίπτουν σε όλα τα κοινά γνωρίσματα δύο σχέσεων. Κατασκευάζουμε την *εξωτερική συνένωση* $R \overset{\circ}{\bowtie} S$ ξεκινώντας από τη συνένωση $R \bowtie S$ και προσθέτοντας όλες τις μετέωρες πλειάδες της R και της S. Αυτές οι πρόσθετες πλειάδες πρέπει να συμπληρωθούν με το ειδικό σύμβολο για την *κενή τιμή*, $\perp$, σε όλα τα γνωρίσματα που δεν διαθέτουν οι ίδιες, και τα οποία όμως πρέπει να εμφανίζονται στο αποτέλεσμα της συνένωσης. Το σύμβολο $\perp$ γράφεται `NULL` στην SQL (βλ. Ενότητα 2.3.4).

Παράδειγμα 5.13 : Στις Εικόνες 5.6 (α) και (β) βλέπουμε δύο σχέσεις U και V. Η πλειάδα $(1, 2, 3)$ της U συνενώνεται με τις $(2, 3, 10)$ και $(2, 3, 11)$ της V, επομένως αυτές οι τρεις πλειάδες δεν μένουν μετέωρες. Οι άλλες τρεις πλειάδες όμως –η $(4, 5, 6)$ και η $(7, 8, 9)$ της U και η $(6, 7, 12)$ της V– μένουν μετέωρες. Δηλαδή, για καμία από αυτές τις τρεις πλειάδες δεν υπάρχει κάποια πλειάδα της άλλης σχέσης με την οποία να συμπίπτουν και στις δύο κοινές τους συνιστώσες B και C. Επομένως, στη σχέση

A	B	C
1	2	3
4	5	6
7	8	9

(α) Η σχέση U

B	C	D
2	3	10
2	3	11
6	7	12

(β) Η σχέση V

A	B	C	D
1	2	3	10
1	2	3	11
4	5	6	$\perp$
7	8	9	$\perp$
$\perp$	6	7	12

(γ) Το αποτέλεσμα της $U \overset{\circ}{\bowtie} V$

Εικόνα 5.6: Η εξωτερική συνένωση δύο σχέσεων

$U \overset{\circ}{\bowtie} V$, που φαίνεται στην Εικόνα 5.6(γ), οι τρεις μετέωρες πλειάδες συμπληρώνονται με την κενή τιμή $\perp$ στα γνωρίσματα που δεν διαθέτουν οι ίδιες: στο γνώρισμα D για τις πλειάδες της U και στο γνώρισμα A για την πλειάδα της V. □

Υπάρχουν πολλές παραλλαγές της ιδέας της βασικής (φυσικής) εξωτερικής συνένωσης. Η *αριστερή εξωτερική συνένωση* $R \overset{\circ}{\bowtie}_L S$ είναι παρόμοια με την εξωτερική συνένωση, με τη διαφορά ότι συμπληρώνονται με κενές τιμές $\perp$ και συμπεριλαμβάνονται στο αποτέλεσμα μόνο οι μετέωρες πλειάδες του αριστερού ορίσματος, δηλ. της σχέσης R. Αντίστοιχα, η *δεξιά εξωτερική συνένωση* $R \overset{\circ}{\bowtie}_R S$ είναι παρόμοια με την εξωτερική συνένωση, με τη διαφορά ότι συμπληρώνονται με κενές τιμές και συμπεριλαμβάνονται στο αποτέλεσμα μόνο οι μετέωρες πλειάδες του δεξιού ορίσματος, δηλ. της σχέσης S.

Παράδειγμα 5.14 : Αν οι σχέσεις U και V είναι αυτές της Εικόνας 5.6, τότε η $U \overset{\circ}{\bowtie}_L V$ είναι:

A	B	C	D
1	2	3	10
1	2	3	11
4	5	6	$\perp$
7	8	9	$\perp$

και η $U \stackrel{\circ}{\bowtie}_R V$ είναι:

A	B	C	D
1	2	3	10
1	2	3	11
$\perp$	6	7	12

□

Επιπλέον, και οι τρεις τελεστές της φυσικής εξωτερικής συνένωσης έχουν τις ανάλογες εκδοχές θ, στις οποίες πρώτα κατασκευάζουμε τη συνένωση θ και στη συνέχεια συμπληρώνουμε με κενές τιμές $\perp$ και προσθέτουμε στο αποτέλεσμα όσες πλειάδες απέτυχαν να συνενωθούν με κάποια πλειάδα της άλλης σχέσης όταν εφαρμόστηκε η συνθήκη της συνένωσης θ. Θα συμβολίζουμε $\stackrel{\circ}{\bowtie}_C$ μια εξωτερική συνένωση θ, με συνθήκη C. Σε αυτόν τον τελεστή μπορούμε να προσθέσουμε το γράμμα L ή R, για να δηλώσουμε την αριστερή και τη δεξιά εξωτερική συνένωση θ, αντίστοιχα.

Παράδειγμα 5.15 : Έστω U και V οι σχέσεις της Εικόνας 5.6, και ας υπολογίσουμε την

$$U \stackrel{\circ}{\bowtie}_{A>V.C} V$$

Οι πλειάδες $(4,5,6)$ και $(7,8,9)$ της U ικανοποιούν τη συνθήκη συνένωσης και με τις δύο πλειάδες $(2,3,10)$ και $(2,3,11)$ της V. Συνεπώς, σε αυτήν τη συνένωση θ καμία από αυτές τις τέσσερεις πλειάδες δεν μένει μετέωρη. Οι άλλες δύο πλειάδες όμως –η $(1,2,3)$ της U και η $(6,7,12)$ της V– μένουν μετέωρες. Εμφανίζονται επομένως συμπληρωμένες με την κενή τιμή $\perp$ στο αποτέλεσμα που φαίνεται στην Εικόνα 5.7. □

A	$U.B$	$U.C$	$V.B$	$V.C$	D
4	5	6	2	3	10
4	5	6	2	3	11
7	8	9	2	3	10
7	8	9	2	3	11
1	2	3	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	6	7	12

Εικόνα 5.7: Το αποτέλεσμα μιας εξωτερικής συνένωσης θ

5.2.8 Ασκήσεις για την Ενότητα 5.2

Άσκηση 5.2.1 : Έστω οι σχέσεις:

$R(A,B)$: $\{(0,1),\ (2,3),\ (0,1),\ (2,4),\ (3,4)\}$

$S(B,C)$: $\{(0,1),\ (2,4),\ (2,5),\ (3,4),\ (0,2),\ (3,4)\}$

Υπολογίστε το αποτέλεσμα των ακόλουθων πράξεων:
α) $\pi_{A+B,A^2,B^2}(R)$· β) $\pi_{B+1,C-1}(S)$· γ) $\tau_{B,A}(R)$· δ) $\tau_{B,C}(S)$· ε) $\delta(R)$· στ) $\delta(S)$· ζ) $\gamma_{A,\ \mathtt{SUM}(B)}(R)$· η) $\gamma_{B,\mathtt{AVG}(C)}(S)$· θ) $\gamma_A(R)$· ι) $\gamma_{A,\mathtt{MAX}(C)}(R \bowtie S)$· ια) $R \stackrel{\circ}{\bowtie}_L S$· ιβ) $R \stackrel{\circ}{\bowtie}_R S$· ιγ) $R \stackrel{\circ}{\bowtie} S$· ιδ) $R \stackrel{\circ}{\bowtie}_{R.B<S.B} S$.

! **Άσκηση 5.2.2 :** Ένας τελεστής f που δέχεται ως όρισμα μία μόνο σχέση ονομάζεται *ιδιοδύναμος* εάν για όλες τις σχέσεις R ισχύει $f\big(f(R)\big) = f(R)$, αν δηλαδή περισσότερες από μία εφαρμογές του f ισοδυναμούν με μία εφαρμογή του. Ποιοι από τους παρακάτω τελεστές είναι ιδιοδύναμοι; Εξηγήστε γιατί ή δώστε ένα αντιπαράδειγμα.

α) δ· β) π_L· γ) σ_C· δ) γ_L· ε) τ.

! **Άσκηση 5.2.3 :** Μια ενέργεια που μπορεί να γίνει με την επεκτεταμένη προβολή, όχι όμως με την αρχική εκδοχή της προβολής που ορίσαμε στην Ενότητα 2.4.5, είναι η διπλοεγγραφή στηλών. Π.χ. αν $R(A, B)$ είναι μια σχέση, τότε η έκφραση $\pi_{A,A}(R)$ δημιουργεί την πλειάδα (a, a) για κάθε πλειάδα (a, b) στην R. Μπορεί αυτή η πράξη να πραγματοποιηθεί μόνο με τις κλασικές πράξεις της σχεσιακής άλγεβρας που παρουσιάσαμε στην Ενότητα 2.4; Εξηγήστε το σκεπτικό σας.

5.3 Μια λογική για σχέσεις

Εναλλακτικά, αντί για τις αφηρημένες γλώσσες ερωτημάτων που βασίζονται στην άλγεβρα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια μορφή λογικής για να διατυπώσουμε ερωτήματα. Η λογική γλώσσα ερωτημάτων *Datalog* (από το «database logic») αποτελείται από κανόνες που έχουν τη μορφή υποθετικής πρότασης «αν-τότε». Καθένας από αυτούς τους κανόνες εκφράζει την ιδέα ότι από ορισμένους συνδυασμούς πλειάδων σε ορισμένες σχέσεις, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι κάποια άλλη πλειάδα πρέπει να βρίσκεται σε μια άλλη σχέση ή στην απάντηση ενός ερωτήματος.

5.3.1 Κατηγορήματα και άτομα

Οι σχέσεις αναπαρίστανται στην Datalog από *κατηγορήματα*. Κάθε κατηγόρημα δέχεται έναν καθορισμένο αριθμό ορισμάτων, και ένα κατηγόρημα που ακολουθείται από τα ορίσματά του ονομάζεται *άτομο*. Τα άτομα συντάσσονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο με τον οποίο συντάσσονται οι κλήσεις συναρτήσεων στις συμβατικές γλώσσες προγραμματισμού· π.χ., $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ είναι ένα άτομο που αποτελείται από το κατηγόρημα P με ορίσματα $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Κατ' ουσίαν ένα κατηγόρημα είναι το όνομα μιας συνάρτησης που επιστρέφει μια τιμή λογικού τύπου (ή αλλιώς «λογική τιμή»). Αν η σχέση R έχει n γνωρίσματα που διατάσσονται με μια καθορισμένη σειρά, τότε θα χρησιμοποιούμε επίσης το σύμβολο R για να δηλώνουμε ένα κατηγόρημα που αντιστοιχεί σε αυτήν τη σχέση. Το άτομο $R(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ έχει τιμή TRUE (δηλ. «αληθές») αν η πλειάδα $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ανήκει στη σχέση R· αλλιώς έχει τιμή FALSE (δηλ. «ψευδές»).

Παρατηρήστε ότι μια σχέση που ορίζεται από ένα κατηγόρημα μπορεί να θεωρηθεί σύνολο. Στην Ενότητα 5.3.6, θα εξηγήσουμε πώς μπορούμε να επεκτείνουμε την Datalog σε σάκους. Γενικότερα όμως, στις υπόλοιπες ενότητες του βιβλίου, εκτός από την Ενότητα 5.3.6, θα πρέπει να θεωρείτε ότι στο πλαίσιο της Datalog οι σχέσεις είναι σύνολα και όχι σάκοι.

Παράδειγμα 5.16 : Έστω η σχέση R:

A	B
1	2
3	4

Η τιμή του ατόμου $R(1, 2)$ είναι TRUE, όπως επίσης TRUE είναι η τιμή του ατόμου $R(3, 4)$. Για οποιονδήποτε όμως άλλο συνδυασμό τιμών των x και y, η τιμή του $R(x, y)$ είναι FALSE. □

Τα ορίσματα ενός κατηγορήματος μπορούν να είναι όχι μόνο σταθερές, αλλά και μεταβλητές. Όταν ένα ή περισσότερα από τα ορίσματα ενός ατόμου είναι μεταβλητές, τότε το άτομο είναι μια λογικότιμη συνάρτηση που δέχεται τιμές για αυτές τις μεταβλητές και επιστρέφει TRUE ή FALSE.

Παράδειγμα 5.17 : Αν R είναι το κατηγόρημα από το Παράδειγμα 5.16, τότε $R(x, y)$ είναι η συνάρτηση που για κάθε x και y, μας λέει αν η πλειάδα (x, y) ανήκει στη σχέση R. Για το συγκεκριμένο στιγμιότυπο της R που αναφέραμε στο Παράδειγμα 5.16, η συνάρτηση $R(x, y)$ επιστρέφει την τιμή TRUE όταν

1. $x = 1$ και $y = 2$, ή όταν
2. $x = 3$ και $y = 4$

ενώ επιστρέφει την τιμή FALSE σε όλες τις άλλες περιπτώσεις. Ως πρόσθετο παράδειγμα, το άτομο $R(1, z)$ επιστρέφει TRUE αν $z = 2$, και FALSE σε όλες τις άλλες περιπτώσεις. □

5.3.2 Αριθμητικά άτομα

Στην Datalog υπάρχει και ένα διαφορετικό είδος ατόμων, τα *αριθμητικά άτομα*. Αυτό το είδος ατόμων είναι μια σύγκριση δύο αριθμητικών εκφράσεων, φερ' ειπείν, $x < y$ ή $x + 1 \geq y + 4 \times z$. Για να τονίσουμε τη διαφορά ανάμεσα στα δύο είδη ατόμων θα αποκαλούμε τα άτομα που παρουσιάσαμε στην Ενότητα 5.3.1 *σχεσιακά άτομα*: και τα δύο είδη θεωρούνται «άτομα».

Προσέξτε ότι τόσο τα αριθμητικά όσο και τα σχεσιακά άτομα δέχονται ως ορίσματα τις τιμές των μεταβλητών που εμφανίζονται σε αυτά, και επιστρέφουν μια λογική τιμή. Στην ουσία, οι αριθμητικές συγκρίσεις, όπως η $<$ και η $\geq$, είναι σαν ονόματα σχέσεων που περιέχουν όλα τα ζεύγη που αληθεύουν. Μπορούμε δηλαδή να φανταστούμε ότι η σχέση «$<$» περιέχει όλες τις πλειάδες, σαν την $(1, 2)$ ή την $(-1.5, 65.4)$, στις οποίες η πρώτη συνιστώσα είναι μικρότερη από τη δεύτερη. Θυμηθείτε όμως ότι οι σχέσεις των ΒΔ είναι πάντοτε πεπερασμένες και συνήθως μεταβάλλονται με την πάροδο του χρόνου. Αντιθέτως, οι σχέσεις που αντιστοιχούν σε αριθμητικές συγκρίσεις, όπως η $<$, είναι άπειρες και δεν μεταβάλλονται.

5.3.3 Κανόνες και ερωτήματα Datalog

Στην Datalog οι πράξεις που είναι ανάλογες των πράξεων της σχεσιακής άλγεβρας περιγράφονται μέσω *κανόνων*, οι οποίοι αποτελούνται από:

1. Ένα σχεσιακό άτομο που ονομάζεται *κεφαλή*, το οποίο ακολουθείται από
2. Το σύμβολο $\leftarrow$ (το οποίο συνήθως διαβάζεται «αν»), ακολουθούμενο από
3. Τον *κορμό* (του κανόνα), που αποτελείται από ένα ή περισσότερα άτομα που ονομάζονται *υποστόχοι*. Οι υποστόχοι μπορούν να είναι είτε σχεσιακά είτε αριθμητικά άτομα. Οι υποστόχοι συνδέονται με το AND, και πριν από κάθε υποστόχο μπορεί προαιρετικά να χρησιμοποιείται ο λογικός τελεστής NOT.

Παράδειγμα 5.18 : Ο ακόλουθος κανόνας Datalog,

$$\texttt{LongMovie(t,y)} \leftarrow \texttt{Movies(t,y,l,g,s,p) AND l} \geq \texttt{100}$$

ορίζει το σύνολο των ταινιών «με μεγάλη διάρκεια», τις ταινίες δηλαδή που διαρκούν τουλάχιστον 100 λεπτά. Αναφέρεται στη γνωστή μας σχέση `Movies`, το σχήμα της οποίας είναι

```
Movies(title, year, length, genre, studioName, producerC#)
```

Η κεφαλή του κανόνα είναι το άτομο *LongMovie*(t, y). Ο κορμός του κανόνα αποτελείται από δύο υποστόχους:

1. Ο πρώτος υποστόχος περιέχει το κατηγόρημα *Movies* και έξι ορίσματα, που αντιστοιχούν στα έξι γνωρίσματα της σχέσης `Movies`. Σε κάθε όρισμα αντιστοιχεί μια διαφορετική μεταβλητή: η t για τη συνιστώσα `title`, η y για την `year`, η l για την `length` κ.ο.κ. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αυτός ο υποστόχος λέει: «έστω (t, y, l, g, s, p) μια πλειάδα από το τρέχον στιγμιότυπο της σχέσης `Movies`». Ακριβέστερα, η έκφραση *Movies*(t, y, l, g, s, p) αληθεύει όταν οι έξι μεταβλητές έχουν τιμές που συμπίπτουν με τις έξι συνιστώσες κάποιας πλειάδας της σχέσης `Movies`.
2. Ο δεύτερος υποστόχος, $l \geq 100$, αληθεύει όταν η συνιστώσα `length` μιας πλειάδας της σχέσης `Movies` έχει τιμή τουλάχιστον 100.

Μπορούμε να θεωρούμε ότι ο κανόνας συνολικά λέει: η έκφραση *LongMovie*(t, y) αληθεύει αν μπορούμε να βρούμε στη σχέση `Movies` μια πλειάδα με:

α) Τις t και y ως τις δύο πρώτες συνιστώσες (που αντιστοιχούν στα γνωρίσματα `title` και `year`),

β) Μια τρίτη συνιστώσα l (για το γνώρισμα `length`) με τιμή τουλάχιστον 100 και

γ) Οποιεσδήποτε τιμές στις συνιστώσες 4 ώς 6.

Παρατηρήστε ότι ο παραπάνω κανόνας ισοδυναμεί με την ακόλουθη «τιμοδοτοτική εντολή» της σχεσιακής άλγεβρας:

$$\texttt{LongMovie := } \pi_{title,year}\big(\sigma_{length \geq 100}(\texttt{Movies})\big)$$

το δεξιό μέλος της οποίας είναι μια έκφραση σχεσιακής άλγεβρας. □

Ένα *ερώτημα* στη Datalog είναι μια συλλογή από έναν ή περισσότερους κανόνες. Εάν στις κεφαλές αυτών των κανόνων εμφανίζεται μία μόνο σχέση, τότε η απάντηση του ερωτήματος θεωρείται ότι είναι η τιμή αυτής της σχέσης. Έτσι, στο Παράδειγμα 5.18, η απάντηση στο ερώτημα είναι η `LongMovie`. Εάν όμως στις κεφαλές των κανόνων εμφανίζονται περισσότερες από μία σχέσεις, τότε η απάντηση στο ερώτημα είναι μια από αυτές τις σχέσεις, ενώ οι υπόλοιπες συμβάλλουν στον ορισμό της απάντησης. Όταν υπάρχουν πολλά κατηγορήματα που ορίζονται από μια συλλογή κανόνων, θα δεχόμαστε γενικά ότι το αποτέλεσμα του ερωτήματος ονομάζεται `Answer`.

Ανώνυμες μεταβλητές

Πολύ συχνά οι κανόνες Datalog περιέχουν μεταβλητές που εμφανίζονται μία μόνο φορά. Τα ονόματα που χρησιμοποιούνται για αυτές τις μεταβλητές δεν παίζουν κανένα ρόλο. Ενδιαφερόμαστε για το όνομα μιας μεταβλητής μόνο όταν αυτή εμφανίζεται περισσότερες από μία φορές, διότι μέσω του ονόματος μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι πρόκειται για την ίδια μεταβλητή στη δεύτερη και στις επόμενες εμφανίσεις της. Για το λόγο αυτό, θα δεχθούμε τη συνήθη σύμβαση ότι όταν χρησιμοποιείται ως όρισμα ενός ατόμου η κάτω παύλα, _, συμβολίζει μια μεταβλητή που εμφανίζεται μόνο σε εκείνο το σημείο. Αν το σύμβολο _ εμφανίζεται πολλές φορές, τότε συμβολίζει διαφορετικές μεταβλητές και ποτέ την ίδια. Π.χ., ο κανόνας του Παραδείγματος 5.18 θα μπορούσε να γραφτεί ως εξής:

$$\texttt{LongMovie(t,y)} \leftarrow \texttt{Movies(t,y,l,\_,\_,\_) AND l} \geq \texttt{100}$$

Οι τρεις μεταβλητές g, s και p, που εμφανίζονται από μία φορά έχουν αντικατασταθεί από κάτω παύλες. Δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε καμία από τις υπόλοιπες μεταβλητές, διότι αυτές εμφανίζονται δύο φορές στον κανόνα.

5.3.4 Το νόημα των κανόνων Datalog

Το Παράδειγμα 5.18 μας βοήθησε να κατανοήσουμε σε κάποιο βαθμό ποιο είναι το νόημα των κανόνων Datalog. Ακριβέστερα, φανταστείτε ότι οι μεταβλητές ενός κανόνα διατρέχουν όλο το φάσμα των πιθανών τιμών. Όταν οι τιμές των μεταβλητών είναι τέτοιες ώστε να αληθεύουν όλοι οι υποστόχοι του κανόνα, τότε βλέπουμε ποια είναι η τιμή της κεφαλής για αυτές τις τιμές μεταβλητών και προσθέτουμε την προκύπτουσα πλειάδα στη σχέση της οποίας το κατηγόρημα βρίσκεται στην κεφαλή.

Για παράδειγμα, ας φανταστούμε ότι οι τιμές των έξι μεταβλητών του Παραδείγματος 5.18 διατρέχουν όλο το φάσμα των πιθανών τιμών τους. Οι μόνοι συνδυασμοί τιμών που κάνουν όλους τους υποστόχους να αληθεύουν είναι αυτοί για τους οποίους οι τιμές των (t, y, l, g, s, p), με αυτή τη σειρά, αποτελούν μια πλειάδα της σχέσης `Movies`. Επιπλέον, επειδή πρέπει να αληθεύει και ο υποστόχος $l \geq 100$, στην πλειάδα αυτή η μεταβλητή l, δηλαδή η τιμή της συνιστώσας `length`, πρέπει να είναι τουλάχιστον 100. Όταν συναντούμε ένα τέτοιο συνδυασμό τιμών, τοποθετούμε την πλειάδα (t, y) στη σχέση της κεφαλής του κανόνα, δηλαδή στη σχέση `LongMovie`.

Προκειμένου όμως το αποτέλεσμα ενός κανόνα να είναι μια πεπερασμένη σχέση και προκειμένου οι κανόνες που έχουν είτε αριθμητικούς υποστόχους είτε *αρνημένους* υποστόχους (υποστόχους δηλαδή στους οποίους προτάσσεται ο τελεστής `NOT`) να έχουν ένα διαισθητικά αποδεκτό νόημα, πρέπει να επιβάλουμε κάποιους περιορισμούς στον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούνται οι μεταβλητές μέσα στους κανόνες. Η συνθήκη αυτή, την οποία θα αποκαλούμε συνθήκη *ασφαλείας*, είναι η εξής:

- Κάθε μεταβλητή που εμφανίζεται σε κάποιο σημείο του κανόνα πρέπει να εμφανίζεται και σε κάποιον μη αρνημένο σχεσιακό υποστόχο του κορμού του κανόνα.

Συγκεκριμένα, κάθε μεταβλητή που εμφανίζεται στην κεφαλή ή σε έναν αρνημένο σχεσιακό υποστόχο ή σε έναν αριθμητικό υποστόχο πρέπει να εμφανίζεται επίσης και σε έναν μη αρνημένο σχεσιακό υποστόχο του κορμού.

Παράδειγμα 5.19 : Έστω ο κανόνας

$$\texttt{LongMovie(t,y)} \leftarrow \texttt{Movie(t,y,l,\_,\_,\_) AND l} \geq \texttt{100}$$

του Παραδείγματος 5.18. Ο πρώτος υποστόχος είναι ένας μη αρνημένος σχεσιακός υποστόχος, που περιέχει όλες τις μεταβλητές που εμφανίζονται σε κάποιο σημείο του κανόνα, περιλαμβανομένων των ανώνυμων μεταβλητών που αναπαρίστανται από κάτω παύλες. Πιο συγκεκριμένα, οι δύο μεταβλητές t και y που εμφανίζονται στην κεφαλή εμφανίζονται επίσης και στον πρώτο υποστόχο του κορμού. Αντίστοιχα, η μεταβλητή l εμφανίζεται σε έναν αριθμητικό υποστόχο, αλλά εμφανίζεται επίσης στον πρώτο υποστόχο. Συνεπώς, ο κανόνας είναι ασφαλής. □

Παράδειγμα 5.20 : Στον ακόλουθο κανόνα η συνθήκη ασφαλείας παραβιάζεται τρεις φορές:

$$\texttt{P(x,y)} \leftarrow \texttt{Q(x,z) AND NOT R(w,x,z) AND x<y}$$

1. Η μεταβλητή y εμφανίζεται στην κεφαλή, αλλά δεν εμφανίζεται σε κανένα μη αρνημένο σχεσιακό υποστόχο του κορμού. Παρατηρήστε ότι μολονότι η μεταβλητή y εμφανίζεται στον αριθμητικό υποστόχο $x < y$, αυτό δεν βοηθά στον περιορισμό των πιθανών τιμών της y σε ένα πεπερασμένο σύνολο. Από τη στιγμή που βρούμε κάποιες τιμές a, b και c για τις μεταβλητές w, x και z, αντίστοιχα, που να ικανοποιούν τους πρώτους δύο υποστόχους, είμαστε αναγκασμένοι να προσθέσουμε στη σχέση που αντιστοιχεί στο κατηγόρημα P της κεφαλής του κανόνα τις απειράριθμες πλειάδες (b, d) για τις οποίες ισχύει ότι $d > b$.
2. Η μεταβλητή w εμφανίζεται σε έναν αρνημένο σχεσιακό υποστόχο, δεν εμφανίζεται όμως σε κανέναν μη αρνημένο σχεσιακό υποστόχο.
3. Η μεταβλητή y εμφανίζεται σε έναν αριθμητικό υποστόχο, δεν εμφανίζεται όμως σε κανέναν μη αρνημένο σχεσιακό υποστόχο.

Επομένως, ο παραπάνω κανόνας δεν είναι ασφαλής και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη Datalog. □

Υπάρχει και ένας δεύτερος τρόπος για να ορίσουμε το νόημα των κανόνων. Αντί να εξετάσουμε όλες τις πιθανές τιμοδοτήσεις των μεταβλητών, εξετάζουμε όλα τα σύνολα των πλειάδων στις σχέσεις που αντιστοιχούν σε καθέναν από τους μη αρνημένους σχεσιακούς υποστόχους. Εάν κάποια τιμοδότηση πλειάδων για κάθε μη αρνημένο σχεσιακό υποστόχο είναι *συνεπής* (με αυτό εννοούμε ότι αποδίδει την ίδια τιμή σε κάθε εμφάνιση οποιασδήποτε μεταβλητής), τότε εξετάζουμε την προκύπτουσα τιμοδότηση για όλες τις μεταβλητές του κανόνα. Σημειωτέον πως επειδή ο κανόνας είναι ασφαλής, κάθε μεταβλητή τιμοδοτείται.

Για κάθε συνεπή τιμοδότηση των μεταβλητών, εξετάζουμε τους αρνημένους σχεσιακούς υποστόχους και τους αριθμητικούς υποστόχους, και ελέγχουμε αν αληθεύουν όλοι. Υπενθυμίζουμε ότι ένας αρνημένος υποστόχος αληθεύει αν το άτομο του έχει τιμή «ψευδές». Αν όλοι οι υποστόχοι αληθεύουν, τότε λαμβάνουμε την πλειάδα στην οποία μετατρέπεται η κεφαλή του κανόνα για τη συγκεκριμένη τιμοδότηση των μεταβλητών. Η πλειάδα αυτή προστίθεται στη σχέση της οποίας το κατηγόρημα βρίσκεται στην κεφαλή του κανόνα.

Παράδειγμα 5.21 : Ας εξετάσουμε τον ακόλουθο κανόνα Datalog:

```
P(x,y) ← Q(x,z) AND R(z,y) AND NOT Q(x,y)
```

Έστω η σχέση Q που αποτελείται από τις πλειάδες $(1, 2)$ και $(1, 3)$, και η σχέση R που αποτελείται από τις πλειάδες $(2, 3)$ και $(3, 1)$. Υπάρχουν δύο μη αρνημένοι σχεσιακοί υποστόχοι, $Q(x, z)$ και $R(z, y)$. Επομένως, πρέπει να εξετάσουμε όλους τους συνδυασμούς τιμοδοτήσεων των πλειάδων από τις σχέσεις Q και R για αυτούς τους υποστόχους. Στον πίνακα της Εικόνας 5.8 παρατίθενται οι τέσσερεις δυνατοί συνδυασμοί.

	Πλειάδα της `Q(x,z)`	Πλειάδα της `R(z,y)`	Συνεπής τιμοδότηση;	ο `NOT Q(x,y)` αληθεύει;	Κεφαλή που προκύπτει
1)	$(1, 2)$	$(2, 3)$	Ναι	Όχι	–
2)	$(1, 2)$	$(3, 1)$	Όχι· $z = 2, 3$	Αδιάφορο	–
3)	$(1, 3)$	$(2, 3)$	Όχι· $z = 3, 2$	Αδιάφορο	–
4)	$(1, 3)$	$(3, 1)$	Ναι	Ναι	$P(1, 1)$

Εικόνα 5.8: Όλες οι δυνατές τιμοδοτήσεις πλειάδων για τις σχέσεις $Q(x, z)$ και $R(z, y)$

Η δεύτερη και η τρίτη επιλογή της Εικόνας 5.8 δεν είναι συνεπείς, διότι αποδίδουν δύο διαφορετικές τιμές στη μεταβλητή z. Επομένως, στη συνέχεια δεν θα εξετάσουμε άλλο αυτές τις τιμοδοτήσεις.

Η πρώτη επιλογή, στην οποία ο υποστόχος $Q(x, z)$ τιμοδοτείται με την πλειάδα $(1, 2)$ και ο $R(z, y)$ με την πλειάδα $(2, 3)$, δίνει μια συνεπή τιμοδότηση, όπου οι μεταβλητές x, y και z παίρνουν τις τιμές 1, 3 και 2, αντίστοιχα. Προχωράμε λοιπόν στη συνέχεια στον έλεγχο των υπόλοιπων υποστόχων – αυτών που δεν είναι μη αρνημένοι σχεσιακοί υποστόχοι. Υπάρχει ένας μόνο τέτοιος υποστόχος, ο `NOT Q(x,y)`. Για αυτήν την τιμοδότηση των μεταβλητών, αυτός ο υποστόχος γίνεται `NOT Q(1,3)`. Αφού η πλειάδα $(1, 3)$ είναι μια πλειάδα της Q, αυτός ο υποστόχος δεν αληθεύει, οπότε δεν παράγεται καμία πλειάδα στην κεφαλή του κανόνα από την τιμοδότηση (1).

Η τελευταία επιλογή είναι η (4). Σε αυτήν, η τιμοδότηση είναι συνεπής: οι μεταβλητές x, y και z τιμοδοτούνται 1, 1 και 3, αντίστοιχα. Ο υποστόχος `NOT Q(x,y)` λαμβάνει την τιμή `NOT Q(1,1)`, και αφού η πλειάδα $(1, 1)$ δεν είναι πλειάδα της σχέσης Q, ο υποστόχος αληθεύει. Υπολογίζουμε συνεπώς την κεφαλή $P(x, y)$ για αυτήν την τιμοδότηση των μεταβλητών, και βρίσκουμε ότι είναι $P(1, 1)$. Συνεπώς, η πλειάδα $(1, 1)$ συμπεριλαμβάνεται στη σχέση P. Επειδή έχουμε εξαντλήσει όλες τις πιθανές τιμοδοτήσεις των πλειάδων, αυτή είναι η μοναδική πλειάδα στη σχέση P. □

5.3.5 Εκτασιακά και προθεσιακά κατηγορήματα

Είναι χρήσιμο να κάνουμε τη διάκριση ανάμεσα στα:

- *Εκτασιακά* κατηγορήματα, δηλαδή κατηγορήματα των οποίων οι σχέσεις είναι αποθηκευμένες σε μια βάση δεδομένων, και στα
- *Προθεσιακά* κατηγορήματα, των οποίων οι σχέσεις υπολογίζονται με την εφαρμογή ενός η περισσοτέρων κανόνων Datalog.

Η διαφορά αυτή είναι ίδια με τη διαφορά ανάμεσα στους τελεστέους μιας έκφρασης σχεσιακής άλγεβρας, που είναι «εκτασιακοί» (δηλ. ορίζονται από την *έκτασή* τους, που δεν είναι παρά το «τρέχον στιγμιότυπο μιας σχέσης»), και τις σχέσεις που υπολογίζονται από εκφράσεις της σχεσιακής άλγεβρας είτε ως το τελικό αποτέλεσμα είτε ως ενδιάμεσα αποτελέσματα που αντιστοιχούν σε κάποια υποέκφραση. Οι σχέσεις αυτού του τύπου ονομάζονται «προθεσιακές» (δηλ. ορίζονται με βάση την «πρόθεση» του προγραμματιστή).

Όταν θα αναφερόμαστε σε κανόνες Datalog, θα αποκαλούμε τη σχέση που αντιστοιχεί σε ένα κατηγόρημα «προθεσιακή» ή «εκτασιακή», ανάλογα με το αν αυτό το κατηγόρημα είναι προθεσιακό ή εκτασιακό, αντίστοιχα. Θα χρησιμοποιούμε επίσης το ακρωνύμιο *ΠΒΔ*, που σημαίνει «προθεσιακή βάση δεδομένων», για να αναφερόμαστε είτε σε ένα προθεσιακό κατηγόρημα είτε στην αντίστοιχη σχέση. Παρομοίως, θα χρησιμοποιούμε το ακρωνύμιο *ΕΒΔ*, που σημαίνει «εκτασιακή βάση δεδομένων», για τα εκτασιακά κατηγορήματα και τις αντίστοιχες σχέσεις.

Συνεπώς, στο Παράδειγμα 5.18, η σχέση `Movies` είναι μια σχέση ΕΒΔ, ορίζεται δηλαδή από την έκτασή της. Το κατηγόρημα *Movies* είναι παρομοίως ένα κατηγόρημα ΕΒΔ. Η σχέση και το κατηγόρημα `LongMovie` είναι αμφότερα προθεσιακά.

Ένα κατηγόρημα ΕΒΔ δεν μπορεί ποτέ να εμφανιστεί στην κεφαλή ενός κανόνα, αν και επιτρέπεται να εμφανίζεται στον κορμό. Τα κατηγορήματα ΠΒΔ επιτρέπεται να εμφανίζονται στην κεφαλή ή στον κορμό ενός κανόνα, ή και στα δύο. Συνηθίζεται επίσης να κατασκευάζουμε μία και μόνο σχέση χρησιμοποιώντας πολλούς κανόνες με το ίδιο κατηγόρημα ΠΒΔ στις κεφαλές. Θα δούμε μια ενδεικτική εφαρμογή αυτής της ιδέας στο Παράδειγμα 5.24, που αφορά την ένωση δύο σχέσεων.

Χρησιμοποιώντας μια σειρά από προθεσιακά κατηγορήματα μπορούμε να κατασκευάσουμε όλο και πιο σύνθετες συναρτήσεις των σχέσεων ΕΒΔ. Η διαδικασία που χρησιμοποιούμε είναι ανάλογη με την κατασκευή εκφράσεων της σχεσιακής άλγεβρας με τη χρήση πολλών τελεστών.

5.3.6 Η εφαρμογή κανόνων Datalog σε σάκους

Η γλώσσα Datalog είναι εγγενώς μια λογική συνόλων. Όταν όμως δεν υπάρχουν αρνημένοι σχεσιακοί υποστόχοι, οι μέθοδοι για την αποτίμηση των κανόνων Datalog που ισχύουν όταν οι σχέσεις θεωρούνται σύνολα μπορούν να εφαρμοστούν και σε σάκους. Όταν οι σχέσεις είναι σάκοι, είναι εννοιολογικά απλούστερο να χρησιμοποιήσουμε τη δεύτερη προσέγγιση για την αποτίμηση των κανόνων Datalog, εκείνη την οποία παρουσιάσαμε στην Ενότητα 5.3.4. Υπενθυμίζουμε ότι αυτή η τεχνική έγκειται στην εξέταση κάθε μη αρνημένου σχεσιακού υποστόχου και τη διαδοχική αντικατάστασή του με όλες τις πλειάδες της σχέσης που αντιστοιχεί στο κατηγόρημα αυτού του υποστόχου. Όταν μια επιλογή πλειάδων για καθένα υποστόχο δίνει μια συνεπή τιμοδότηση για κάθε μεταβλητή και όλοι οι αριθμητικοί υποστόχοι αληθεύουν,[2] τότε

[2] Σημειωτέον ότι θα πρέπει να μην υπάρχουν αρνημένοι σχεσιακοί υποστόχοι εντός του κανόνα. Δεν μπορούμε να αποδώσουμε κάποιο σαφώς καθορισμένο νόημα σε έναν τυχόντα κανόνα Datalog με αρνημένους

εξετάζουμε ποια μορφή λαμβάνει η κεφαλή με αυτήν την τιμοδότηση των μεταβλητών και συμπεριλαμβάνουμε την προκύπτουσα πλειάδα στη σχέση της κεφαλής.

Εφόσον εδώ χειριζόμαστε σχέσεις-σάκους, δεν απαλείφουμε τις διπλοεγγεγραμμένες πλειάδες από τη σχέση της κεφαλής. Επιπλέον, επειδή εξετάζουμε όλους τους συνδυασμούς πλειάδων για τους υποστόχους, μια πλειάδα που εμφανίζεται n φορές στη σχέση ενός υποστόχου θα εξετάζεται n φορές ως πλειάδα αυτού του υποστόχου, «συμπράττοντας» κάθε φορά με όλους τους συνδυασμούς πλειάδων για τους υπολοίπους υποστόχους.

Παράδειγμα 5.22 : Ας εξετάσουμε τον κανόνα

$$\texttt{H(x,z)} \leftarrow \texttt{R(x,y) AND S(y,z)}$$

όπου η σχέση $R(A, B)$ έχει τις πλειάδες:

A	B
1	2
1	2

και η σχέση $S(B, C)$ τις πλειάδες:

B	C
2	3
4	5
4	5

Η μόνη φορά στην οποία έχουμε συνεπή τιμοδότηση των πλειάδων των υποστόχων (δηλ. μια τιμοδότηση των πλειάδων για την οποία η τιμή της μεταβλητής y είναι ίδια σε κάθε υποστόχο) είναι όταν ο πρώτος υποστόχος τιμοδοτείται με μία από τις πλειάδες $(1, 2)$ της σχέσης R, και ο δεύτερος με την πλειάδα $(2, 3)$ από τη σχέση S. Αφού η πλειάδα $(1, 2)$ εμφανίζεται δύο φορές στη σχέση R, και η $(2, 3)$ μία φορά στη σχέση S, θα υπάρχουν δύο τιμοδοτήσεις πλειάδων για τις οποίες οι μεταβλητές x, y, z θα έχουν τις τιμές $x = 1, y = 2$ και $z = 3$. Η πλειάδα της κεφαλής, δηλ. η (x, z), είναι για καθεμία από αυτές τις τιμοδοτήσεις ίση με $(1, 3)$. Συνεπώς, στη σχέση H της κεφαλής εμφανίζεται δύο φορές η πλειάδα $(1, 3)$ και καμία άλλη πλειάδα. Δηλαδή, η σχέση

1	3
1	3

είναι η σχέση της κεφαλής που ορίζεται από αυτόν τον κανόνα. Γενικότερα, αν η πλειάδα $(1, 2)$ εμφανιζόταν n φορές στη σχέση R και η πλειάδα $(2, 3)$ m φορές στη σχέση S, τότε η πλειάδα $(1, 3)$ θα εμφανιζόταν nm φορές στη σχέση H. □

Αν μια σχέση ορίζεται από πολλούς κανόνες, τότε το αποτέλεσμα είναι η ένωση σάκων όσων πλειάδων δημιουργούνται από κάθε κανόνα χωριστά.

Παράδειγμα 5.23 : Ας εξετάσουμε τη σχέση H που ορίζεται από τους δύο κανόνες:

σχεσιακούς υποστόχους αν οι σχέσεις είναι σάκοι.