ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ 10.1

Η σύζευξη σπιν-τροχιάς και τα διατηρήσιμα μεγέθη του ατόμου

«Καλοί» και «κακοί» κβαντικοί αριθμοί

Θά συζητήσομε τώρα ὁρισμένα σημεῖα πού στήν προηγούμενη συζήτηση ἀφέθηκαν σκόπιμα ἔξω ὥστε νά μήν καθυστερήσει ἡ ἐξαγωγή τοῦ βασικοῦ μας ἀποτελέσματος (Τύπος τοῦ Sommerfeld). Ἄς ξεκινήσομε μέ τήν ὑπενθύμιση ὅτι τά διατηρήσιμα μεγέθη ἑνός προβλήματος εἶναι ἐκεῖνα πού μετατίθενται μέ τή Χαμιλτονιανή του. Αὐτό ὅμως σημαίνει συγχρόνως ὅτι τά ἐν λόγω μεγέθη θἆναι καί συμβιβαστά μέ τή Χαμιλτονιανή καί ἄρα θά μποροῦν νά μετρηθοῦν ταυτόχρονα μέ τήν ἐνέργεια τοῦ συστήματος. (Τό ὁποῖο, βεβαίως, εἶναι πολύ καλόδεκτο ἀπό φυσική ἄποψη).

Ἄν τώρα ἀπό τά διατηρήσιμα μεγέθη ἑνός προβλήματος διαλέξομε κάποιο ὑποσύνολό τους πού εἶναι συμβιβαστά καί μεταξύ τους, τότε αὐτά μαζί μέ τή Χαμιλτονιανή συναποτελοῦν ἕνα *πλῆρες σύστημα ταυτόχρονα μετρήσιμων μεγεθῶν.* Ἔστω γιά ἁπλότητα ὅτι ἔχομε δύο τέτοια συμβιβαστά μεταξύ τους διατηρήσιμα μεγέθη καί ἄς τά συμβολίσομε μέ τά γράμματα A καί B. Ἡ τριάδα τῶν μεγεθῶν H, A, B θά ἀποτελεῖ τότε ἕνα πλῆρες σύστημα καί ἐπομένως μιά κβαντική κατάσταση θά ὁρίζεται μονοσήμαντα σάν κοινή ἰδιοκατάστασή τους. Δηλαδή οἱ τρεῖς ἐξισώσεις ἰδιοτιμῶν

$$H\psi = E\psi, \qquad A\psi = \alpha\psi, \qquad B\psi = \beta\psi$$

θά συναληθεύουν καί θά ὁρίζουν μονοσήμαντα(*) μιά κοινή ἰδιοσυνάρτηση $\psi_{E\alpha b}$ πού θά παριστάνει μιά κατάσταση τοῦ σωματιδίου μέ ἀπόλυτα καθορισμένη ἐνέργεια καί ὅποιες φυσικές ποσότητες ἀντιστοιχοῦν στά μεγέθη A καί B. Ἔτσι τό γεγονός ὅτι ἡ τριάδα H, A, B ἀποτελεῖ πλῆρες σύστημα σημαίνει, σέ πιό φυσική γλώσσα, ὅτι ἄν ξέρομε τίς τιμές αὐτῶν τῶν τριῶν μεγεθῶν ἡ κατάσταση κίνησης τοῦ σωματιδίου εἶναι πλήρως καθορισμένη. Ξέρομε ἐπιπλέον ὅτι ἐφ' ὅσον τό σύστημα παραμένει ἀπομονωμένο αὐτές οἱ τιμές θά παραμείνουν χρονικά ἀμετάβλητες, ἀφοῦ τά ἀντίστοιχα φυσικά μεγέθη εἶναι διατηρήσιμα. Μέ ἄλλα λόγια ὁποτεδήποτε στό μέλλον ἐπιχειρήσομε νά μετρήσομε τά μεγέθη A, B (καί φυσικά τό H) θά ξαναβροῦμε τίς ἀρχικές του τιμές α, β. Αὐτές οἱ τιμές θά χαρακτηρίζουν τήν κίνηση τοῦ σωματιδίου γιά πάντα. Εἶναι οἱ *καλοί κβαντικοί ἀριθμοί* τοῦ συστήματος. Μέ ἄλλα λόγια, *καλοί κβαντικοί ἀριθμοί εἶναι οἱ ἰδιοτιμές(*) τῶν διατηρήσιμων μεγεθῶν ἑνός προβλήματος.* Ἀντίθετα, ἄν ἕνα μέγεθος δέν εἶναι διατηρήσιμο οἱ ἰδιοτιμές του δέν μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν γιά τόν χαρακτηρισμό τῆς κατάστασης τοῦ συστήματος διότι μιά ἰδιοκατάσταση αὐτοῦ τοῦ μεγέθους δέν θά παραμείνει ἰδιοκατάσταση ἀλλά θά μετατραπεῖ σέ μιά κατάσταση ὑπέρθεσης ὅπου ὅλες (ἐν γένει) οἱ ἰδιοτιμές θά κάνουν τήν ἐμφάνισή τους. Σέ μιά τέτοια περίπτωση οἱ ἰδιοτιμές εἶναι

(*) Μέ τή γνωστή βέβαια ἀπροσδιοριστία μιᾶς φάσης

(*) ἤ κάποιοι ἄλλοι ἀριθμοί ἀπό τούς ὁποίους ἐξαρτῶνται οἱ ἰδιοτιμές σίγουρα ἀκατάλληλες γιά τό «σημάδεμα» τῶν καταστάσεων καί ἐπομένως θά *πρέπει νά* θεωρηθοῦν σάν *κακοί κβαντικοί ἀριθμοί* τοῦ συστήματος.

Τό τυπικό παράδειγμα ἐφαρμογῆς τῶν *παραπάνω* ἰδεῶν εἶναι βέβαια ἡ κίνηση σ' ἕνα κεντρικό δυναμικό ὅπου καί οἱ τρεῖς συνιστῶσες τῆς στροφορμῆς l_x, l_y, l_z μετατίθενται μέ τή Χαμιλτονιανή καί ἄρα εἶναι διατηρήσιμα μεγέθη ὅπως καί στό ἀντίστοιχο κλασικό πρόβλημα. Διατηρήσιμο μέγεθος εἶναι, βέβαια, καί τό $\boldsymbol{l}^2$ ἀφοῦ δέν εἶναι παρά μιά συνάρτηση τῶν l_x, l_y, l_z. Δεδομένου τώρα ὅτι οἱ συνιστῶσες τῆς στροφορμῆς δέν μετατίθενται μεταξύ τους, μετατίθενται ὅμως μέ τό $\boldsymbol{l}^2$, τό πλῆρες σύστημα μεγεθῶν τοῦ προβλήματος θά μπορεῖ νά περιέχει, ἐκτός ἀπό τή Χαμιλτονιανή, μόνο τό l^2 καί μία ἀπό τίς συνιστῶσες l_x, l_y, l_z(†). Ἡ συνήθης ἐκλογή εἶναι ἡ συνιστῶσα l_z ὁπότε τό πλῆρες σύστημα εἶναι ἡ τριάδα H, $\boldsymbol{l}^2$, l_z ἡ ὁποία ὁρίζει μονοσήμαντα τίς γνωστές μας ἰδιοσυναρτήσεις $\psi_{nlm} = R_{nl}(r)\, Y_l^m(\theta, \varphi)$ ἑνός κεντρικοῦ δυναμικοῦ. Σύμφωνα μέ τά προηγούμενα οἱ ἀριθμοί n, l, m, μέσω τῶν ὁποίων καθορίζονται οἱ ἰδιοτιμές τῶν διατηρήσιμων μεγεθῶν H, $\boldsymbol{l}^2$, l_z, εἶναι οἱ καλοί κβαντικοί ἀριθμοί τοῦ προβλήματος. Ἄν ἐπιπλέον τό σωματίδιο πού κινεῖται μέσα στό κεντρικό μας δυναμικό φέρει καί ἐσωτερική στροφορμή (σπίν) τότε στήν τριάδα H, l^2, l_z θά πρέπει νά προστεθοῦν καί τά μεγέθη s^2 καί s_z τά ὁποῖα σίγουρα μετατίθενται μέ τά προηγούμενα ἀφοῦ οἱ δύο ὁμάδες δροῦν πάνω σέ διαφορετικές μεταβλητές. (Στίς μεταβλητές θέσης ἡ πρώτη καί στή μεταβλητή τοῦ σπίν ἡ δεύτερη). Οἱ καταστάσεις κίνησης τοῦ σωματιδίου θά χαρακτηρίζονται λοιπόν τώρα ἀπό τήν πεντάδα τῶν καλῶν κβαντικῶν ἀριθμῶν n, l, s, m_l, m_s ἀπό τήν ὁποία ὅμως παραλείπεται συνήθως ὁ s μιά καί ἔχει τήν ἴδια πάντα τιμή. (Γιά ἕνα δεδομένο εἶδος σωματιδίου, φυσικά).

Καί ἐρχόμαστε τώρα στήν περίπτωση ὅπου στό κεντρικό μας δυναμικό (στό δυναμικό Coulomb συγκεκριμένα) προστίθεται καί ἡ σύζευξη σπίν-τροχιᾶς.

$$V_{LS} = \frac{e^2}{2m^2c^2}\,\frac{\boldsymbol{l}\cdot \mathrm{s}}{r^3}$$

Ποιοί θἄναι τώρα οἱ καλοί κβαντικοί ἀριθμοί τοῦ ἀτόμου; Ἄς δοῦμε πρῶτα δύο ἀπ' αὐτούς —τούς m_l καί m_s— πού σίγουρα χάνουν αὐτή τήν ἰδιότητα. Γι' αὐτό τό σκοπό χρειάζεται ἁπλῶς νά ὑπολογίσομε τούς μεταθέτες $[l_z, V_{LS}]$ καί $[s_z, V_{LS}]$ καί νά δοῦμε ἄν βγαίνουν μηδέν ἤ ὄχι. Ἡ ζωή μας θά γίνει εὐκολότερη ἄν παρατηρήσομε ὅτι τό r^{-3} μετατίθεται μέ τό l_z (διότι εἶναι συνάρτηση μόνο τοῦ r) καί φυσικά μέ τό s_z τό ὁποῖο δέν ἔχει καμμία σχέση μέ τίς χωρικές μεταβλητές. Ἔτσι τό μόνο πού χρειάζεται εἶναι νά ὑπολογίσομε τούς μεταθέτες $[l_z, \boldsymbol{l}\cdot \mathrm{s}]$, $[s_z, \boldsymbol{l}\cdot \mathrm{s}]$ τό ὁποῖο καί θά κάνομε εὐθύς ἀμέσως γιά μιά τυχούσα μάλιστα συνιστῶσα l_i ἤ s_i. Θἄχομε

$$[l_i, \boldsymbol{l}\cdot \mathrm{s}] = [l_i, l_j s_j] = [l_i, l_j] s_j = i e_{ijk} l_k s_j = i(\mathrm{s}\times \boldsymbol{l})_i \qquad (16)$$

(†) Ἡ χρήση δύο πολύ παραπλήσιων συμβόλων ($\boldsymbol{l}$ καί l) γιά τό μέγεθος τῆς στροφορμῆς ἐλπίζομε νά μήν προκαλέσει σύγχυση στόν ἀναγνώστη.

καί παρόμοια

$$[s_i,\ \boldsymbol{l}\cdot \mathbf{s}] = i e_{ijk}\ l_j\ s_k = i(\boldsymbol{l}\times \mathbf{s})_i \tag{17}$$

ὁπότε γιά τίς συνιστῶσες l_z καί s_z εἰδικά, θἄναι

$$[l_z,\ \boldsymbol{l}\cdot \mathbf{s}] = i(s_x l_y - s_y l_x)\quad ,\quad [s_z,\ \boldsymbol{l}\cdot \mathbf{s}] = i(l_x s_y - l_y s_x) \tag{18}$$

τό ὁποῖο, βέβαια, σημαίνει ὅτι τά l_z, s_z *δέν μετατίθενται* μέ τή σύζευξη σπίν-τροχιᾶς ἄρα οὔτε καί μέ τή νέα Χαμιλτονιανή τοῦ ἀτόμου. Δηλαδή παύουν νά εἶναι διατηρήσιμα μεγέθη καί ἑπομένως οἱ ἰδιοτιμές τους παύουν κι αὐτές νά εἶναι καλοί κβαντικοί ἀριθμοί.

Ὅμως ἀπό τίς (16) καί (17) βγαίνει κι ἕνα ἄλλο («θετικό» αὐτή τή φορά) συμπέρασμα. Ἄν τίς προσθέσομε κατά μέλη (ὁπότε στήν ἀριστερή πλευρά θά ἐμφανιστεῖ ὁ μεταθέτης τῆς i-συνιστώσας τῆς ὁλικῆς στροφορμῆς μέ τόν ὅρο $\boldsymbol{l}\cdot \mathbf{s}$) θἄχομε

$$[j_i,\ \boldsymbol{l}\cdot \mathbf{s}] = [l_i + s_i,\ \boldsymbol{l}\cdot \mathbf{s}] = i(\mathbf{s}\times \boldsymbol{l})_i + i(\boldsymbol{l}\times \mathbf{s})_i = 0 \tag{19}$$

ὅπου ὁ μηδενισμός τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι ἄμεσο ἀποτέλεσμα τοῦ γεγονότος ὅτι οἱ διανυσματικοί τελεστές $\boldsymbol{l}$ καί $\mathbf{s}$ μετατίθενται καί ἑπομένως ἰσχύει καί γι' αὐτούς ἡ γνωστή ἰδιότητα $\mathbf{s}\times\boldsymbol{l} = -\boldsymbol{l}\times\mathbf{s}$ τοῦ ἐξωτερικοῦ γινομένου τῶν συνήθων διανυσμάτων.

Τό ἀποτέλεσμα (19) εἶναι, βέβαια, πολύ καλόδεκτο. Αὐτό πού μᾶς λέει εἶναι ὅτι, παρά τήν μή διατήρηση τῆς τροχιακῆς στροφορμῆς καί τοῦ σπίν, τό ἄθροισμά τους εἶναι μιά σταθερά τῆς κίνησης. Ὅπως πρέπει νά συμβαίνει σέ κάθε ἀπομονωμένο σύστημα, *ἡ ὁλική στροφορμή τοῦ ἀτόμου εἶναι ἕνα διατηρήσιμο μέγεθος.*

Ὅμως καί οἱ μερικές στροφορμές $\boldsymbol{l}$ καί $\mathbf{s}$ ἔχουν κάτι πού παραμένει ἀμετάβλητο μέ τό χρόνο· *τό μέγεθός τους.* Αὐτό γίνεται ἀμέσως φανερό ἄν γράψομε τόν ὅρο $\boldsymbol{l}\cdot\mathbf{s}$ σάν $(j^2 - l^2 - s^2)/2$ ὅπου εἶναι πιά μιά συνάρτηση (γραμμική μάλιστα) τῶν μεγεθῶν j^2, l^2, s^2 καί ἄρα μετατίθεται μέ αὐτά. (Γιά τό j^2 αὐτό βέβαια ἦταν ἤδη γνωστό ἀπό τήν (19)).

Τά διατηρήσιμα μεγέθη τοῦ ἀτόμου, μετά τήν προσθήκη τῆς μαγνητικῆς ἀλληλεπίδρασης σπίν καί τροχιακῆς στροφορμῆς, εἶναι λοιπόν τά ἑξῆς

$$H,\ l^2,\ s^2,\ j^2,\ j_z$$

δηλαδή ἡ ἐνέργεια, τά μεγέθη τῶν μερικῶν στροφορμῶν καί τῆς ὁλικῆς στροφορμῆς καί ἡ z-συνιστώσα τῆς τελευταίας. Ἑπομένως οἱ καλοί κβαντικοί τοῦ ἀτόμου θἄναι τώρα οἱ

$$E,\ l,\ s,\ j,\ m_j$$

ὅπου στή θέση τοῦ E μποροῦμε νά βάλομε κάποιο *κύριο κβαντικό ἀριθμό* n(*) μόνο πού τό E δέν θά ἐξαρτᾶται, ἐν γένει, μόνο ἀπ᾽ αὐτόν ἀλλά καί ἀπ᾽ ὅλους τούς ὑπόλοιπους πλήν τοῦ m_j. (Οἱ ἐνεργειακές ἰδιοτιμές ἑνός ἀπομονωμένου ἀτόμου δέν μπορεῖ νά ἐξαρτῶνται ἀπό τήν κατεύθυνση τοῦ διανύσματος τῆς ὁλικῆς στροφορμῆς, γιατί αὐτό θά παραβίαζε τήν ἀρχή τῆς ἰσοτροπίας τοῦ χώρου).

Καταλήγομε λοιπόν στό συμπέρασμα ὅτι ἡ σύζευξη σπίν-τροχιᾶς ἀλλάζει τούς καλούς κβαντικούς ἀριθμούς τοῦ ἀτόμου καί ἀπό τήν πεντάδα n, l, s, m_l, m_s μᾶς ὑποχρεώνει νά περάσομε στήν n, l, s, j, m_j ὥστε οἱ καταστάσεις μας νά χαρακτηρίζονται ἀπό τίς τιμές φυσικῶν μεγεθῶν πού δέν μεταβάλλονται μέ τό χρόνο. Βλέπομε δηλαδή τώρα ὅτι ἡ ἀλλαγή βάσης $\psi_{nlsm_lm_s} \longrightarrow \psi_{nlsjm_j}$ πού μᾶς ἐπιβλήθηκε ἀπό τό πρόγραμμα τῆς ἐκφυλισμένης θεωρίας διαταραχῶν (διαγωνοποίηση τῆς διαταραχῆς μέσα στόν ὑπόχωρο ἐκφυλισμοῦ) ἐκφράζει μιά πολύ πιό πρωταρχική φυσική ἀπαίτηση: τήν ἀπαίτηση ὅτι *οἱ ἀτομικές καταστάσεις πρέπει νά περιγράφονται μέ κυματοσυναρτήσεις πού τό φυσικό τους «περιεχόμενο» παραμένει χρονικά ἀμετάβλητο.* Καί αὐτή ἡ ἀπαίτηση δέν ἱκανοποιεῖται ἀπό τίς ἀρχικές ἰδιοκαταστάσεις $\psi_{nlsm_lm_s}$ διότι τά διανύσματα $\boldsymbol{l}$ καί $\boldsymbol{s}$, παρότι σταθεροῦ μήκους, ἀλλάζουν διαρκῶς προσανατολισμό, ὁπότε οἱ προβολές τους $\hbar m_l$ καί $\hbar m_s$ στόν ἄξονα z μεταβάλλονται μέ τό χρόνο.

᾿Αξίζει νά μελετήσομε λίγο αὐτή τή χρονική μεταβολή ἐφαρμόζοντας τήν κβαντική ἐξίσωση κίνησης τῶν μέσων τιμῶν

$$i\hbar \frac{d\langle A \rangle}{dt} = \langle [A, H] \rangle$$

ἡ ὁποία γιά $A = l_i$ καί $H = H_0 + V_{LS} = H_0 + \xi(r)\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{s}$, ὅπου $\xi(r) = e^2/2m^2c^2r^3$, δίνει

(*) Ἡ ἔννοια τοῦ «κύριου κβαντικοῦ ἀριθμοῦ» εἶναι διαρκής πηγή ἐννοιολογικῆς σύγχυσης διότι μόνο στό ἄτομο τοῦ Ὑδρογόνου αὐτός ὁ ἀριθμός ἔχει μιά ἁπλή καί ἀμφιμονοσήμαντη σχέση μέ ἕνα συγκεκριμένο διατηρήσιμο μέγεθος ὅπως ἡ ἐνέργεια. Σ᾽ ὅλες τίς ἄλλες περιπτώσεις τό n ἁπλῶς ἀριθμεῖ τή σειρά τῶν ἐνεργειακῶν σταθμῶν σέ κάθε «ἐνεργό δυναμικό» πού ἀντιστοιχεῖ σέ δεδομένες σταθερές τιμές τῶν ἄλλων κβαντικῶν ἀριθμῶν τοῦ προβλήματος. Παραδείγματος χάρη σ᾽ ἕνα κεντρικό δυναμικό χωρίς ἄλλες ἀλληλεπιδράσεις τό ἐνεργό δυναμικό ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τό l ἐνῶ ἄν ὑπάρχει καί σύζευξη σπίν τροχιᾶς περιέχονται καί οἱ κβαντικοί ἀριθμοί j καί s. (Γιά κάθε δεδομένη τριάδα ἀριθμῶν l, s, j τό δυναμικό V_{LS} γίνεται ἕνα συνηθισμένο κεντρικό δυναμικό τῆς μορφῆς $V_{LS} \sim r^{-3}$). Ἔτσι λοιπόν γιά νά καθορίσομε τήν ἐνέργεια σ᾽ ἕνα τέτοιο πρόβλημα χρειαζόμαστε ἀφ᾽ ἑνός τούς κβαντικούς ἀριθμούς πού περιέχονται στό ἐνεργό δυναμικό, ὥστε αὐτό νά εἶναι γνωστό, καί μετά, γιά νά ποῦμε σέ ποιά στάθμη αὐτοῦ τοῦ δυναμικοῦ βρισκόμαστε, θέλομε ἕναν ἀκόμη ἀριθμό πού νά καθορίζει τή σειρά της. Ἔ αὐτός ἀκριβῶς ὁ ἀριθμός πού χρειάζεται μαζί μέ τούς ἄλλους γιά νά προσδιοριστεῖ ἡ ἐνέργεια τοῦ συστήματος φέρει τό μεγαλοπρεπές ὄνομα «κύριος κβαντικός ἀριθμός» ἐπειδή συνέβη σ᾽ ἕνα μοναδικό φυσικό σύστημα (τό ἄτομο τοῦ Ὑδρογόνου) νά παίζει τόν κύριο ρόλο!

$$i\hbar \frac{d\langle l_i\rangle}{dt} = \langle [l_i,\ H_0+V_{LS}]\rangle = \langle [l_i,\ V_{LS}]\rangle$$

$$= \langle \xi(r)\ [l_i,\ l\cdot s]\rangle = i\hbar \langle \xi(r)\ (s\times l)_i\rangle$$

$$\Rightarrow \frac{d\langle l\rangle}{dt} = \langle \xi(r)\ s\times l\rangle = \langle \xi(r)\rangle \cdot \langle s\rangle \times \langle l\rangle \qquad (20)$$

ὅπου ἡ μέση τιμή τοῦ γινομένου $\xi(r)s\times l$ γράφτηκε σάν γινόμενο τριῶν μέσων τιμῶν, διότι οἱ καταστάσεις $\psi_{nlm_lsm_s} = R_{nl}(r)\cdot Y^{m_l}_l(\Omega)\cdot X^{m_s}_s(\mu)$ ἔχουν κι αὐτές τή μορφή ἑνός γινομένου στό ὁποῖο ὁ κάθε παράγοντας ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τίς μεταβλητές πάνω στίς ὁποῖες δρᾶ ὁ κάθε παράγοντας τοῦ τελεστῆ $\xi(r)s\times l$. Καί εἶναι προφανές, βέβαια, ὅτι ἡ κάθε μερική μέση τιμή στήν (20) ἀφορᾶ μόνο τίς σχετικές, ὡς πρός τόν ἀντίστοιχο τελεστή, μεταβλητές. Παραδείγματος χάρη γιά τή μέση τιμή $\langle\xi(r)\rangle$ θἄναι

$$\langle \xi(r)\rangle = \xi_{nl} = \int_0^\infty R^2_{nl}\xi(r)r^2dr$$

ὁπότε ἡ (20) θά γράφεται

$$\frac{d\langle l\rangle}{dt} = \xi_{nl}\ \langle s\rangle\times\langle l\rangle$$

ἤ ἰσοδύναμα

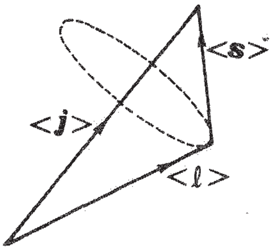
$$\frac{d\langle l\rangle}{dt} = \xi_{nl}\ \langle j\rangle\times\langle l\rangle \qquad (21)$$

ὅπου, βέβαια, χρησιμοποιήσαμε τήν ταυτότητα $\langle l\rangle\times\langle l\rangle = 0$(*) γιά νά ἀντικαταστήσομε τό $\langle s\rangle$ μέ $\langle s\rangle + \langle l\rangle = \langle s+l\rangle = \langle j\rangle$.

Ἡ ἐξίσωση (21) δέν εἶναι παρά ἡ πασίγνωστη ἐξίσωση τῆς χρονικῆς μεταβολῆς ἑνός διανύσματος πού ἐκτελεῖ μεταπτωτική κίνηση γύρω ἀπό ἕνα σταθερό ἄξονα. Ἐδῶ αὐτός ὁ ἄξονας ὁρίζεται ἀπό τό *σταθερό* διάνυσμα $\langle j\rangle$ τῆς μέσης ὁλικῆς στροφορμῆς, ἐνῶ ἡ γωνιακή ταχύτητα τῆς περιστροφῆς θά δίδεται ἀπό τή σχέση

$$\omega = \xi_{nl}|\langle j\rangle|$$

Τό διάνυσμα $\langle l\rangle$ δέν παραμένει λοιπόν σταθερό (αὐτό μᾶς ἦταν ἤδη γνωστό) ἀλλά ἐκτελεῖ μεταπτωτική κίνηση γύρω ἀπό τό ἀκίνητο διάνυσμα $\langle j\rangle$ τῆς ὁλικῆς στροφορμῆς τοῦ ἀτόμου. Τήν ἴδια ἀκριβῶς κίνηση ἐκτελεῖ καί τό μέσο διάνυσμα $\langle s\rangle$ τοῦ σπίν, ὅπως μπορεῖ νά δεῖ μόνος του ὁ ἀναγνώστης. Ἡ χρονική μεταβολή τῶν μέσων τιμῶν $\langle l\rangle$ καί $\langle s\rangle$ θά ἀποδίδεται λοιπόν παραστατικά ἀπό ἕνα σχῆμα σάν τό 4.



Σχῆμα 4

Αὐτή ἡ ἀπεικόνιση εἶναι γνωστή σάν τό *διανυσματικό μοντέλο τοῦ ἀτόμου* καί ἀξίζει αὐτή τήν ἰδιαίτερη ὀνομασία διότι ἄν χρησιμοποιηθεῖ ἔξυπνα μπορεῖ νά ὁδηγήσει σέ ποσοτικές σχέσεις πού ἡ ἐξαγωγή καί ἡ κατανόησή τους θἄταν ἀλλοιῶς πολύ πιό δύσκολη. Τέτοιου εἴδους χρήση τοῦ διανυσματικοῦ μοντέλου θά γίνει ἀργότερα.

(*) Καί σημειῶστε μ᾽ αὐτή τήν εὐκαιρία ὅτι ἡ σχέση $\mathbf{A}\times\mathbf{A} = 0$ ἰσχύει μόνο γιά συνήθη διανύσματα (καί τέτοια εἶναι οἱ μέσες τιμές $\langle \boldsymbol{l} \rangle$, $\langle \mathbf{s} \rangle$) ἤ γιά διανυσματικούς τελεστές μέ μετατιθέμενες συνιστῶσες. Ὅμως γιά τελεστές ὅπως π.χ. ὁ $\boldsymbol{l}$ εἶναι $\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{l} \neq 0$. Συγκεκριμένα λόγω τῶν μεταθετικῶν σχέσεων $[l_i, l_j] = i\hbar e_{ijk} l_k$ θἄναι

$$\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{l} = i\hbar\boldsymbol{l}$$