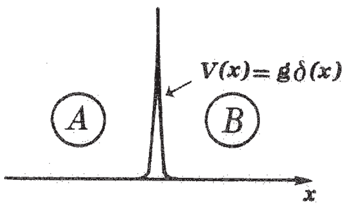
ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ 11.1

Το δέλτα φράγμα δυναμικού

Ένα παράδειγμα πλήρους άθροισης μιας διαταρακτικής σειράς



Σχῆμα 8

Παρ᾽ ὅτι τό δυναμικό αὐτοῦ τοῦ παραδείγματος δέν εἶναι παρά μιά ὁριακή περίπτωση τοῦ τετραγωνικοῦ φράγματος, ($V_0 \to \infty$, $L \to 0$, $V_0 L = g$ = σταθερά) ἐν τούτοις ἀξίζει νά μελετηθεῖ ἀνεξάρτητα διότι χάρη στίς πολύ εἰδικές ἰδιότητες τῆς δέλτα συνάρτησης θά μπορέσομε νά ὑπολογίσομε ὄχι μόνο τήν προσέγγιση Born ἀλλά καί ὅλους τούς ἀνώτερους ὅρους τῆς διαταρακτικῆς σειρᾶς ἡ ὁποία μπορεῖ τελικά νά ἀθροιστεῖ καί νά μᾶς δώσει τό ἀκριβές ἀποτέλεσμα. Ξεκινᾶμε μέ τήν ὑπενθύμιση ὅτι οἱ διαδοχικοί ὅροι τῆς διαταρακτικῆς σειρᾶς προκύπτουν ὁ ἕνας ἀπό τόν ἄλλο μέ δράση τοῦ ἴδιου πάντα ὁλοκληρωτικοῦ τελεστῆ. Συγκεκριμένα εἶναι

$$\psi^{(n)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, x')\,\psi^{(n-1)}(x')\,dx' \qquad (11)$$

ὅπου

$$K(x, x') = G(x-x')\,U(x')$$

Γιά λόγους πού θά φανοῦν σύντομα εἶναι σκόπιμο νά γράψομε τήν (11) στήν ἰσοδύναμη συμβολική μορφή

$$\psi^{(n)} = K \cdot \psi^{(n-1)}$$

ὅπου K ὁ γραμμικός τελεστής πού ἡ δράση του, πάνω σέ μιά τυχούσα συνάρτηση f, ὁρίζεται ἀπό τή σχέση

$$K \cdot f \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, x')\,f(x')\,dx'$$

ὅσο γιά τό νόημα τῶν ἀνώτερων δυνάμεων τοῦ K —οἱ ὁποῖες θά μᾶς χρειαστοῦν ἐπίσης— αὐτό προκύπτει ἀμέσως μέ ἐφαρμογή τοῦ ἐπιμεριστικοῦ κανόνα. Παραδείγματος χάρη γιά τή δεύτερη δύναμη θἄναι

$$K^2 \cdot f \equiv K \cdot (Kf) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, x') \left(\int_{-\infty}^{+\infty} K(x', x'')\,f(x'')\,dx'' \right) dx'$$

καί παρόμοια γιά τίς ἀνώτερες δυνάμεις. Χρησιμοποιώντας τώρα αὐτό τόν πυκνό συμβολισμό μποροῦμε νά γράψομε τή νιοστή διόρθωση στήν κυματοσυνάρτηση σάν

$$\psi^{(n)} = K^n \cdot \psi^{(0)}$$

ὁπότε ἡ διαταρακτική σειρά

$$\psi = \psi^{(0)} + \psi^{(1)} + \ldots + \psi^{(n)} + \ldots$$

θά γράφεται στή συμβολική μορφή

$$\psi = (1+K+K^2+\ldots+K^n+\ldots)\psi^{(0)} \tag{12}$$

ὅπου, βέβαια, $\psi^{(0)} = \exp(ikx)$.

Θά δείξομε τώρα ὅτι γιά τό δυναμικό

$$V(x) = g\delta(x) \Rightarrow U(x) = \frac{2mg}{\hbar^2}\delta(x) = \lambda\delta(x) \qquad \left(\lambda = \frac{2mg}{\hbar^2}\right)$$

τό ἄθροισμα τῆς σειρᾶς (12) μπορεῖ νά βρεθεῖ σέ κλειστή μορφή. Αὐτό πού βασικά χρειαζόμαστε εἶναι ἕνας κλειστός τύπος γιά τή δράση τῆς γενικῆς δύναμης K^n πάνω σέ μιά τυχούσα συνάρτηση $f(x)$. Γιά $n=1$ θἄχομε

$$K \cdot f = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-x')\lambda\delta(x')\, f(x')dx' = G(x)\, \lambda f(0)$$

ἐνῶ γιά $n=2$ καί $n=3$ θἄναι

$$K^2 \cdot f = K(Kf) = K\big(G(x)\lambda f(0)\big) = \big(K \cdot G(x)\big)\lambda f(0) = G(x)\big(\lambda G(0)\big)\big(\lambda f(0)\big)$$

$$K^3 \cdot f = (K \cdot G)\big(\lambda G(0)\big)\big(\lambda f(0)\big) = G(x)\big(\lambda G(0)\big)^2\big(\lambda f(0)\big)$$

καί ἐπαγωγικά

$$K^n \cdot f = G(x)\big(\lambda G(0)\big)^{n-1}\big(\lambda f(0)\big)$$

Ἑπομένως γιά τή σειρά

$$F = f+Kf+K^2f+\ldots+K^nf+\ldots$$

θἄχομε

$$F = f + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \cdot f = f + \lambda f(0)\, G(x) \sum_{n=1}^{\infty} \big(\lambda G(0)\big)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \qquad F(x) = f(x) + \frac{\lambda f(0)}{1-\lambda G(0)}\, G(x) \tag{13}$$

Γιά νά ὑπολογίσομε λοιπόν τό διαταρακτικό ἀνάπτυγμα (12) δέν ἔχομε παρά νά ἐφαρμόσομε τόν (13) γιά

$$f(x) = \psi^{(0)} = e^{ikx}, \qquad G(x) = e^{ik|x|}/2ik$$

Ἔτσι παίρνομε

$$\psi(x) = e^{ikx} + \frac{\lambda}{2ik-\lambda}\, e^{ik|x|} \tag{14}$$

Ἄς δοῦμε ἄν ἡ κυματοσυνάρτηση (14) ἔχει τά ἀναμενόμενα φυσικά χαρακτηριστικά. Ἄν μέ ψ_A καί ψ_B συμβολίσομε τίς μορφές της γιά $x<0$ καί $x>0$ ἀντίστοιχα, τότε θἄναι

$$\psi_A = e^{ikx} + \frac{\lambda}{2ik-\lambda}\, e^{-ikx}, \qquad \psi_B = \frac{2ik}{2ik-\lambda}\, e^{ikx} \tag{15}$$

Αὐτές οἱ ἐκφράσεις, προφανῶς ἀνταποκρίνονται στίς συνθῆκες σκέδασης ἀπό ἀριστερά. Οἱ συντελεστές ἀνάκλασης καί διέλευσης, ὅπως προκύπτουν ἀμέσως ἀπό τίς (15), εἶναι

$$R(k) = \frac{\lambda^2}{4k^2+\lambda^2}, \qquad T(k) = \frac{4k^2}{4k^2+\lambda^2} \tag{16}$$

καί τό ἄθροισμά τους κάνει μονάδα ὅπως θἄπρεπε.

Γιά νά ἐλέγξομε τήν ὀρθότητα αὐτῶν τῶν ἀποτελεσμάτων θά πρέπει, βέβαια, νά λύσομε τήν ἐξίσωση Schrödinger

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}\,(E - g\delta(x))\,\psi = \psi'' + (k^2 - \lambda\delta(x))\psi = 0 \tag{17}$$

μέ τίς κατάλληλες συνοριακές συνθῆκες. Ἐπειδή γιά $x \neq 0$ εἶναι $\delta(x) = 0$ μποροῦμε νά γράψομε ἀμέσως τίς λύσεις στίς περιοχές A καί B ἐνσωματώνοντας καί τίς συνοριακές συνθῆκες σκέδασης ἀπό ἀριστερά. Συγκεκριμένα θἄναι

$$\psi_A = e^{ikx} + Ae^{-ikx}, \quad \psi_B = Be^{ikx} \tag{18}$$

Γιά νά δοῦμε τώρα τί συνέπειες ἔχει, γιά τό σημεῖο $x = 0$, ἡ παρουσία τῆς δ-συνάρτησης δέν ἔχομε παρά νά ὁλοκληρώσομε τήν (17) ἀπό $-\varepsilon$ ἕως $+\varepsilon$ καί νά πάρομε τό ὅριο $\varepsilon \to 0$. Ἔτσι θἄχομε

$$\psi'(+\varepsilon) - \psi'(-\varepsilon) + k^2 \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \psi(x)dx - \lambda \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x)\psi(x)dx = 0$$

ὁπότε γιά $\varepsilon \to 0$ θἄναι

$$\psi'(0+) - \psi'(0-) = \lambda\psi(0)$$

Ἡ κυματοσυνάρτηση θἄχει λοιπόν ἀσυνεχῆ πρώτη παράγωγο στό $x = 0$ ἀλλά θἄναι συνεχής ἡ ἴδια. Ἐπομένως οἱ συνθῆκες πού πρέπει νά ἐπιβληθοῦν στίς λύσεις (18) εἶναι οἱ

$$\psi_A(0) = \psi_B(0), \qquad \psi'_B(0) - \psi'_A(0) = \lambda\psi(0)$$

καί δίνουν

$$1 + A = B, \qquad ikB - (ik - ikA) = \lambda(1 + A)$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{\lambda}{2ik-\lambda}, \qquad B = \frac{2ik}{2ik-\lambda}$$

ἀκριβῶς ὅπως δείχνει καί ἡ λύση (15) πού βρήκαμε νωρίτερα ἀθροίζοντας τή διαταρακτική σειρά.