Πρόβλημα 2

α) Έχουμε ότι

$$\begin{array}{ll} a_{11}=1 & a_{21}=0 \\ a_{12}=-1 & a_{22}=0 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

και

$$\begin{array}{ll} b_{11}=0 & b_{21}=0 \\ b_{12}=0 & b_{22}=1 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

και επομένως $\det A = \det B = 0$, οπότε οι συνθήκες είναι αμιγείς.

β) Έχουμε ότι

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

και επομένως $\det A = \det B = -1$, οπότε οι συνθήκες είναι μικτές. Για να τις φέρουμε στη ζητούμενη μορφή, έχουμε

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Psi(0)+\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Psi(1)=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \quad &\Rightarrow \\ \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Psi(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Psi(1) \quad &\Rightarrow \\ \Psi(1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Psi(0)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}\Psi(0) & \end{aligned}$$

γ) Αφαιρώντας τη δεύτερη σχέση από την πρώτη έχουμε

$$3y(0)-3y'(0)=0 \qquad \Rightarrow \qquad y(0)=y'(0)$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη σχέση επί 2 και προσθέτοντας τη δεύτερη έχουμε

$$9y(1)+6y'(1)=0 \qquad \Rightarrow \qquad y(1)=-\frac{2}{3}y'(1)$$

Οι συνοριακές συνθήκες είναι προφανώς αμιγείς.

δ) Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη σχέση επί 5 και προσθέτουμε την πρώτη, οπότε προκύπτει

$$2y(0)+2y'(0)-y'(1)=0 \Rightarrow y'(1)=2y(0)+2y'(0).$$

Σε συνδυασμό με τη δεύτερη από τις αρχικές εξισώσεις, έχουμε

$$\begin{pmatrix}y(1)\\ y'(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y(0)\\ y'(0)\end{pmatrix}$$

Πρόβλημα 3

α) Είναι ήδη σε μορφή Liouville, με $w = x^2$ και $v = l(l+1)$.

β) Ξεκινάμε από την τυπική μορφή της εξίσωσης

$$-xy'' - (1-x)y' - \lambda y = 0$$

οπότε έχουμε $a = -x$ και $b = -(1-x)$, οπότε

$$\mu = k(-\frac{1}{x})\exp\left(\int \frac{1-x}{x}\,dx\right) = -\frac{k}{x}e^{\ln x - x} = -ke^{-x}$$

και $w = -\mu = ke^{-x}$, οπότε επιλέγουμε $k = 1$. Τελικά, η μορφή Liouville της εξίσωσής μας είναι

$$xe^{-x}y'' + (1-x)e^{-x}y' + \lambda e^{-x}y = 0$$

γ) Έχουμε κατά τα γνωστά $a = -(1-x^2)$ και $b = x$, οπότε

$$\begin{aligned}
\mu &= k(-\frac{1}{1-x^2})\exp\left(-\int \frac{x}{1-x^2}dx\right) = -\frac{k}{1-x^2}\exp\left(\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{1-x^2}\right) \\
&= -\frac{k}{1-x^2}\exp\left(\frac{1}{2}\ln(1-x^2)\right) = -\frac{k}{1-x^2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = -k(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

και $w = -\mu = k(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, οπότε επιλέγουμε $k = 1$. Τελικά, η μορφή Liouville της εξίσωσής μας είναι

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}y'' - x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}y' + \lambda(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}y = 0$$

Πρόβλημα 5

α) Θα δείξουμε ότι $W(a) = W(b) = 0$. Με βάση τη σχέση $y'(a) = hy(a)$ έχουμε ότι

$$W(a) = y_1(a)y_2'(a) - y_1'(a)y_2(a) = y_1(a)hy_2(a) - hy_1(a)y_2(a) = 0.$$

Ομοίως για το $W(b)$.

β) Γράφουμε τις μικτές συνθήκες $\Psi(b) = S\Psi(a)$ στη μορφή:

$$\begin{aligned}
y(b) &= \alpha y(a) + \beta y'(a) \\
y'(b) &= \gamma y(a) + \delta y'(a)
\end{aligned}$$

οπότε έχουμε

$$
\begin{aligned}
W(b) &= y_1(b)y_2'(b) - y_2(b)y_1'(b) \\
&= \big(\alpha y_1(a) + \beta y_1'(a)\big)\big(\gamma y_2(a) + \delta y_2'(a)\big) - \big(\alpha y_2(a) + \beta y_2'(a)\big)\big(\gamma y_1(a) + \delta y_1'(a)\big) \\
&= (\beta\gamma - \alpha\delta)y_1'(a)y_2(a) + (\alpha\delta - \beta\gamma)y_1(a)y_2'(a) \\
&= \det S[y_1(a)y_2'(a) - y_1'(a)y_2(a)] \\
&= \det S W(a)
\end{aligned}
$$

Για να είναι οι συνθήκες αυτοσυζυγείς θα πρέπει

$$
\begin{aligned}
p(a)W(a) - p(b)W(b) = 0 &\quad \Rightarrow \\
p(a)W(a) - p(b)\det S W(a) = 0 &\quad \Rightarrow \\
W(a)[p(a) - p(b)\det S] = 0 &\quad \Rightarrow \\
p(a) = p(b)\det S &
\end{aligned}
$$

Πρόβλημα 7

α) Για τις συνοριακές συνθήκες ισχύει ότι

$$
\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} \qquad \text{ή} \qquad \Psi(a) = S'\Psi(b) \quad \text{με} \quad S' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

οπότε έχουμε $\det S' = 0$. Όπως μπορεί να δειχθεί εύκολα (βλ. Πρόβλημα 5), $W(a) = \det S'\, W(b)$. Για να είναι αυτοσυζυγείς οι συνθήκες θα πρέπει $p(b) = p(a)\det S' = 0$, το οποίο δεν ισχύει, αφού $p(x) = 1$. Άρα οι συνθήκες δεν είναι αυτοσυζυγείς. Ωστόσο, η αυτοσυζυγία είναι ικανή αλλά όχι και αναγκαία συνθήκη της πραγματικότητας των ιδιοτιμών, αφού η $W(y, y^*)$ μπορεί να μηδενίζεται απλώς όταν οι συναρτήσεις $y(x)$ είναι πραγματικές. Στην προκειμένη περίπτωση, από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της εξίσωσης έχουμε

$$
\sigma^2 = -\lambda \;\Rightarrow\; \begin{cases} \lambda = k^2, \;\Rightarrow\; y = \alpha \sin kx + \beta \cos kx \\ \lambda = -\gamma^2, \;\Rightarrow\; y = \alpha e^{\gamma x} + \beta e^{-\gamma x} \end{cases}
$$

Για τη δεύτερη περίπτωση, έχουμε από τις συνοριακές συνθήκες

$$
\begin{aligned}
y(0) &= 0 \;\Rightarrow\; \alpha + \beta = 0 \\
y'(0) &= y'(1) \;\Rightarrow\; \alpha\gamma - \beta\gamma = \alpha\gamma e^1 - \beta\gamma e^{-1} \;\Rightarrow\; 2\alpha = (e + e^{-1})\alpha
\end{aligned}
$$

δηλαδή αυτή η περίπτωση είναι αδύνατη. Για την πρώτη περίπτωση, οι συνοριακές συνθήκες δίνουν

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \Rightarrow \beta = 0 \\ y'(0) &= y'(1) \Rightarrow \cos k = 1 \Rightarrow k = n\pi \Rightarrow \lambda = n^2 k^2 \end{aligned}$$

δηλαδή οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές. Επίσης οι συγκεκριμένες ιδιοτιμές αποτελούν το σύνολο των ιδιοτιμών, όπως προκύπτει από το θέωρημα των κόμβων.

β) Όπως και πριν, οι συνοριακές συνθήκες είναι μη αυτοσυζυγείς. Η περίπτωση $\lambda = -\gamma^2$ δίνει για τις συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 0 \\ y'(0) &= 2y'(1) \Rightarrow \alpha\gamma - \beta\gamma = 2\alpha\gamma e^1 - 2\beta\gamma e^{-1} \Rightarrow 2\alpha = (e + e^{-1})2\alpha \end{aligned}$$

δηλαδή αυτή η περίπτωση είναι αδύνατη. Για την περίπτωση $\lambda = k^2$, οι συνοριακές συνθήκες δίνουν

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \Rightarrow \beta = 0 \\ y'(0) &= 2y'(1) \Rightarrow \cos k = \frac{1}{2} \Rightarrow k = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

και ικανοποιείται το κριτήριο των κόμβων.

γ) Και πάλι, οι συνοριακές συνθήκες είναι μη αυτοσυζυγείς. Η περίπτωση $\lambda = -\gamma^2$ δίνει για τις συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} y'(0) &= 0 \Rightarrow \alpha\gamma - \beta\gamma = 0 \Rightarrow \alpha = \beta \\ y(0) &= y(1) \Rightarrow \alpha + \beta = \alpha e + \beta e^{-1} \Rightarrow 2\alpha = (e + e^{-1})\alpha \end{aligned}$$

δηλαδή αυτή η περίπτωση είναι αδύνατη. Για την περίπτωση $\lambda = k^2$, οι συνοριακές συνθήκες δίνουν

$$\begin{aligned} y'(0) &= 0 \Rightarrow \alpha = 0 \\ y(0) &= y(1) \Rightarrow \cos k = 1 \Rightarrow k = n\pi \end{aligned}$$

(δ) Όπως προηγουμένως, έχουμε για την περίπτωση $\lambda = k^2$

$$\begin{aligned} y'(0) &= 0 \Rightarrow \alpha = 0 \\ y(0) &= \sqrt{2}y(1) \Rightarrow \cos k = \sqrt{2} \Rightarrow k = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Πρόβλημα 9

Πρόβλημα 15

Το ανάπτυγμα Fourier οποιασδήποτε συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα $0 < x < L$ έχει μορφή

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

όπου

$$c_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\, dx, \qquad c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

Επομένως, για τη συγκεκριμένη συνάρτηση $f(x) = x^2$ έχουμε

$$c_0 = \frac{1}{L} \int_0^L x^2\, dx = \frac{L^3}{3L} = \frac{L^2}{3}$$

και

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2}{L} \left(\frac{L}{n\pi} \right)^3 \int_0^{n\pi} u^2 \cos u\, du$$

όπου εφαρμόσαμε την αντικατάσταση $u = n\pi x/L$. Για το αόριστο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\begin{aligned} \int u^2 \cos u\, du &= \int u^2\, d(\sin u) = u^2 \sin u - 2 \int u \sin u\, du = u^2 \sin u + 2 \int u\, d(\cos u) \\ &= u^2 \sin u + 2u \cos u - 2 \int \cos u\, du = u^2 \sin u + 2u \cos u - 2 \sin u \end{aligned}$$

ενώ για το ορισμένο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} u^2 \cos u\, du &= (u^2 \sin u + 2u \cos u - 2 \sin u)\big|_0^{n\pi} \\ &= (n\pi)^2 \sin n\pi + 2n\pi \cos n\pi - 2 \sin n\pi = 0 + 2n\pi(-1)^n + 0 \end{aligned}$$

και τελικά

$$c_n = \frac{2}{L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^3 2n\pi(-1)^n = \frac{4L^2(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

δηλαδή

$$x^2 = \frac{L^3}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{L}$$

Η γραφική παράσταση είναι η ακόλουθη:
Βλ. mde215.jpg

Πρόβλημα 16

Το ανάπτυγμα οποιασδήποτε συνάρτησης $f(x)$ σε μιγαδική σειρά Fourier στο διάστημα $(-l,l)$ έχει μορφή

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{in\pi x/l}, \qquad \text{όπου} \quad c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-in\pi x/l}\,dx$$

Επομένως, στην προκειμένη περίπτωση όπου $f(x) = e^x$ και $l = \pi$ έχουμε

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-in}e^{(1-in)x}\,|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi(1-in)}\left(e^{\pi-in\pi} - e^{-\pi+in\pi}\right) = \frac{\cos n\pi \sinh\pi}{\pi(1-in)} = \frac{(-1)^n\sinh\pi}{\pi(1-in)} \end{aligned}$$

δηλαδή τελικά

$$f(x) = \frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{1-in}e^{inx}$$

Η παραπάνω συνάρτηση είναι πραγματική, αφού αποτελεί άθροισμα ζευγών συζυγών όρων, δηλαδή για κάθε θετικό n υπάρχουν οι όροι

$$\frac{(-1)^n e^{inx}}{1-in}, \qquad \text{και} \qquad \frac{(-1)^n e^{-inx}}{1+in}$$

Πρόβλημα 32

Τα σημεία ±1 είναι ομαλά ιδιόμορφα για την εξίσωση Chebyshev, και επομένως με την απαίτηση η λύση να είναι πεπερασμένη σε αυτά το πρόβλημα είναι καλά τεθειμένο. Για να φέρουμε την εξίσωση στη μορφή Liouville, έχουμε

$$\begin{aligned} \mu &= k\frac{1}{1-x^2}\exp\left(\int \frac{-x}{1-x^2}dx\right) = \frac{k}{1-x^2}\exp\left(\frac{1}{2}\int\frac{d(1-x^2)}{1-x^2}\right) \\ &= \frac{k}{1-x^2}\left[\exp\left(\ln(1-x^2)\right)\right]^{\frac{1}{2}} = k(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

δηλαδή η μορφή Liouville της εξίσωσης θα είναι

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}y'' - (1-x^2)^{1\frac{1}{2}} + \lambda(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 0$$

οπότε η συνάρτηση βάρους είναι $w = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Όσον αφορά τις ιδιοτιμές, η εξίσωσή μας είναι διβάθμια, με βήμα 2 και εναρκτήριες δυνάμεις 0 ή 1, οπότε οι δυνατές δυνάμεις τερματισμού θα είναι όλοι οι μη αρνητικοί ακέραιοι. Εισάγοντας τη δύναμη τερματισμού, έστω x^n, στους μεγιστοβάθμιους όρους, έχουμε

$$-n(n-1) - n + \lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = n^2, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Οι σχέσεις ορθογωνιότητας έπονται άμεσα από τη μορφή της συνάρτησης βάρους. Τα ολοκληρώματα ορθογωνιότητας συγκλίνουν διότι η συνάρτηση βάρους απειρίζεται σαν $x^{-\frac{1}{2}}$, δηλαδή η αρνητική δύναμη είναι μικρότερη από 1.

Πρόβλημα 33