# Πρόβλημα 6

α) Έχουμε κατά τα γνωστά ότι οι ιδιοτιμές είναι $\lambda = k^2$ με $k > 0$, ενώ οι συνοριακές συνθήκες «επιλέγουν» ως ιδιοσυναρτήσεις τις $\sin kx$. Έτσι, η τυχούσα $f(x)$ μπορεί να γραφτεί ως

$$f(x) = \int_0^\infty a(k) \sin kx \, dx, \quad \text{όπου} \quad a(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin kx \, f(x) \, dx$$

β) Αντίστοιχα, οι ιδιοτιμές είναι $\lambda = k^2$ με $k > 0$ και οι ιδιοσυναρτήσεις οι $\cos kx$, ενώ για το ανάπτυγμα της $f(x)$ έχουμε

$$f(x) = \int_0^\infty a(k) \cos kx \, dx, \quad \text{όπου} \quad a(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos kx \, f(x) \, dx$$

# Πρόβλημα 8

Από τη σχέση (8), σελ. 203, έχουμε

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^\infty e^{-(x-x')^2/4t} \, \theta(x') \, dx' = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-(x-x')^2/4t} \, dx'$$

όπου η αρχική θερμοκρασιακή κατανομή δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = u(x,0) = \theta(x)$, δηλαδή τη συνάρτηση «βαθμίδας», η οποία περιορίζει το διάστημα ολοκλήρωσης στις θετικές τιμές. Μετατοπίζοντας τη μεταβλητή ολοκλήρωσης έχουμε

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-x}^\infty e^{-(x-x')^2/4t} \, d(x'-x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left( \int_{-x}^0 e^{-(x-x')^2/4t} \, d(x'-x) + \int_0^\infty e^{-\phi^2/4t} \, d\phi \right) \end{aligned}$$

όπου εφαρμόσαμε την αντικατάσταση $x' - x = \phi$. Το δεύτερο ολοκλήρωμα ισούται με $\frac{1}{2}\sqrt{\pi 4t} = \sqrt{\pi t}$, ενώ για το πρώτο θέτουμε $\rho = (x' - x)/2\sqrt{t}$ οπότε τελικά έχουμε

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left( 2\sqrt{t} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^0 e^{-\rho^2} \, d\rho + \sqrt{\pi t} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-\rho^2} \, d\rho \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-\rho^2} \, d\rho = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \end{aligned}$$

(2)

# Πρόβλημα 9

Από τη σχέση (11) της σελ. 204 έχουμε

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty (e^{-(x-x')^2/4t} - e^{-(x+x')^2/4t})\, \delta(x'-a)\, dx'$$

όπου βέβαια θέσαμε $f(x) = u(x,0) = \delta(x-a)$, οπότε τελικά έχουμε

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left( e^{-(x-a)^2/4t} - e^{-(x+a)^2/4t} \right)$$

# Πρόβλημα 10

Όπως και στα αντίστοιχα προβλήματα σε πεπερασμένο διάστημα, αλλάζουμε την κλίμακα $T$ ώστε να έχουμε ομογενείς Σ.Σ., δηλαδή ορίζουμε ως στάθμη αναφοράς τη θερμοκρασία $T_0$, οπότε το πρόβλημα παίρνει την εξής μορφή:

$$\begin{array}{r} u_t = u_{xx}, \qquad 0 < x < \infty \\ u(0,t) = 0, \qquad u(\infty,t) = \text{πεπερασμένο} \\ u(x,0) = -T_0 \end{array}$$

και η λύση είναι

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left( e^{-(x-x')^2/4t} - e^{-(x+x')^2/4t} \right) (-T_0)\, dx' \\ &= -\frac{T_0}{2} \left( 1 + \mathrm{erf}(\frac{x}{2\sqrt{t}}) \right) + \frac{T_0}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-(x+x')^2/4t}\, dx' \end{aligned}$$

Για το τελευταίο ολοκλήρωμα, με την αλλαγή μεταβλητής $\phi = (x+x')/2\sqrt{t}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-(x+x')^2/4t}\, dx' &= 2\sqrt{t} \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-\phi^2}\, d\phi = 2\sqrt{t} \left( \int_0^\infty e^{-\phi^2}\, d\phi - \int_0^x e^{-\phi^2}\, d\phi \right) \\ &= 2\sqrt{t} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathrm{erf}(\frac{x}{2\sqrt{t}}) \right) = \sqrt{\pi t} \left( 1 - \mathrm{erf}(\frac{x}{2\sqrt{t}}) \right) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην έκφραση για τη λύση, έχουμε

$$u(x,t) = -\frac{T_0}{2}\left(1 + \mathrm{erf}(\frac{x}{2\sqrt{t}})\right) + \frac{T_0}{2}\left(1 - \mathrm{erf}(\frac{x}{2\sqrt{t}})\right) = -T_0\,\mathrm{erf}(\frac{x}{2\sqrt{t}})$$

και αποκαθιστώντας την αρχική στάθμη αναφοράς

$$u(x,t) = T_0\left(1 - \mathrm{erf}(\frac{x}{2\sqrt{t}})\right)$$