Πρόβλημα 3

Για να είναι εφαρμόσιμη η μέθοδος της συνάρτησης Green, θα πρέπει η ομογενής εξίσωση $Ly = 0$ + Ο.Σ.Σ. να έχει ως μοναδική λύση τη μηδενική.

α) Η ομογενής εξίσωση $y'' = 0$ έχει λύση $y = Ax + B$, και από τις δεδομένες συνοριακές συνθήκες έχουμε

$$y(0) = B = 0 \qquad \text{και} \qquad y'(1) = A = 0$$

οπότε η μοναδική λύση είναι η μηδενική, και επομένως υπάρχει μοναδική συνάρτηση Green. Έχουμε κατά τα γνωστά (βλ. Παράδειγμα 1, σελ. 227)

$$G_L(x) = Ax + B, \qquad G_R(x) = A'x + B'$$

οπότε από τις συνοριακές συνθήκες έχουμε

$$G_L(0) = B = 0 \;\Rightarrow\; G_L(x) = Ax, \qquad \text{και} \qquad G'_R(1) = A' = 0 \;\Rightarrow\; G_R(x) = B'$$

Από τις συνθήκες συνάρμοσης,

$$\begin{aligned} G_L(x') = Ax' = G_R(x') = B' \;&\Rightarrow\; Ax' = B \\ G'_R(x') - G'_L(x') = -1 \;\Rightarrow\; 0 - A = -1 \;&\Rightarrow\; A = 1 \text{ και } B' = x' \end{aligned}$$

οπότε τελικά

$$\begin{aligned} G_L(x) &= \; x, \qquad x < x' \\ G_R(x) &= \; x', \qquad x > x' \end{aligned}$$

Τελικά, η λύση μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$y(x) = \int_0^1 G(x, x')\, f(x')\, dx' = \int_0^x x' f(x')\, dx' + x \int_x^1 f(x')\, dx'$$

β) Η λύση της ομογενούς είναι $y = Ax + B$, και από τις συνοριακές συνθήκες έχουμε $y'(0) = y'(1) = A = 0$, οπότε $y(x) = B$, με B τυχαίο, οπότε δεν υπάρχει μόνο η μηδενική λύση, και άρα δεν είναι εφαρμόσιμη η μέθοδος της συνάρτησης Green.

γ) Εφαρμόζοντας στη λύση της ομογενούς $y = Ax + B$ τις συνοριακές συνθήκες, έχουμε $y(0) = B = y(1) = A + B$, δηλαδή $A = 0$, οπότε η δεύτερη συνθήκη $y'(0) = y'(1)$ ικανοποιείται αυτόματα. Αφού τελικά $y(x) = B$, με B

τυχαίο, δεν υπάρχει μόνο η μηδενική λύση, και άρα δεν είναι εφαρμόσιμη η μέθοδος της συνάρτησης Green.

δ) Ομοίως, βρίσκουμε για τη λύση της ομογενούς $y(x) = Ax$, οπότε δεν υπάρχει μόνο η μηδενική λύση, και άρα δεν είναι εφαρμόσιμη η μέθοδος της συνάρτησης Green.

ε) Εφαρμόζοντας στη λύση της ομογενούς $y = Ax + B$ τις συνοριακές συνθήκες, έχουμε $A = B = 0$, οπότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση Green. Έχουμε κατά τα γνωστά

$$G_L(x) = Ax + B, \qquad G_R(x) = A'x + B'$$

οπότε από τις συνοριακές συνθήκες

$$G_L(0) = B = 0 \;\Rightarrow\; G_L(x) = Ax,$$

και

$$G'_R(1) = -G_R(1) \;\Rightarrow\; A' = -A' - B' \;\Rightarrow\; B' = -2A' \;\Rightarrow\; G_R(x) = A'(x-2)$$

Από τις συνθήκες συνάρμοσης, έχουμε

$$G_R(x') = G_L(x') \;\Rightarrow\; A'(x'-2) = Ax'$$

και

$$G'_R(x') - G'_L(x') = -1 \;\Rightarrow\; A' - A = -1$$

Λύνοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων, έχουμε

$$A' = -\frac{x'}{2} \qquad \text{και} \qquad A = 1 - \frac{x'}{2}$$

οπότε τελικά

$$G(x,x') = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x'}{2}\right) x = \dfrac{x}{2}(2 - x'), & x < x' \\ -\dfrac{x'}{2}(x-2) = \dfrac{x'}{2}(2-x), & x > x' \end{cases}$$

και η λύση μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\begin{aligned} y(x) &= (2-x)\int_0^x \frac{x'}{2}\, f(x')\, dx' + \frac{x}{2}\int_x^1 (2-x')\, f(x')\, dx' \\ &= \left(1 - \frac{x}{2}\right)\int_0^x x'\, f(x')\, dx' + x\int_x^1 \left(1 - \frac{x'}{2}\right)\, f(x')\, dx' \end{aligned}$$

Πρόβλημα 4

Έχουμε κατά τα γνωστά (βλ. Παράδειγμα 2, σελ. 229) ότι

$$\begin{aligned} -G_L''(x) + G_L(x) &= 0, \qquad & G_L(0) &= 0 \\ -G_R''(x) + G_R(x) &= 0, \qquad & G_R(\infty) &= 0 \end{aligned}$$

Η πρώτη από τις παραπάνω εξισώσεις έχει λύση

$$G_L(x) = Ae^x + Be^{-x}, \qquad \text{με} \qquad G_L(0) = A + B = 0 \;\Rightarrow\; A = -B$$

δηλαδή

$$G_L(x) = A(e^x - e^{-x}) = A\sinh x$$

ενώ η δεύτερη έχει λύση

$$G_R(x) = A'e^x + B'e^{-x}, \qquad \text{με} \qquad G_R(\infty) = 0 \;\Rightarrow\; A' = 0$$

δηλαδή

$$G_R(x) = B'e^{-x}$$

Από τις συνθήκες συνάρμοσης, έχουμε

$$G_L(x') = G_R(x') \;\Rightarrow\; A\sinh x' = B'e^{-x'}$$

και

$$G_R'(x') - G_L'(x') = -1 \;\Rightarrow\; A\cosh x' + B'e^{-x'} = -1$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα, παίρνουμε

$$B' = \frac{e^{x'}}{1 + \coth x'} = \sinh x' \qquad \text{και} \qquad A = \frac{e^{x'}e^{-x'}}{(1 + \coth x')\sinh x'} = e^{-x'}$$

δηλαδή τελικά

$$G(x, x') = \begin{cases} e^{-x'}\sinh x, & x < x' \\ \sinh x'\, e^{-x} & x > x' \end{cases}$$

οπότε η λύση θα γράφεται στη μορφή

$$y(x) = e^{-x}\int_0^x \sinh x'\, f(x')\,dx' + \sinh x \int_x^\infty e^{-x'} f(x')\,dx'$$

Για την ειδική περίπτωση $f(x) = e^{-\lambda x}$, έχουμε

$$y(x) = e^{-x}\int_0^x \sinh x'\, e^{-\lambda x'}\,dx' + \sinh x \int_x^\infty e^{-x'} e^{-\lambda x'}\,dx' = \frac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{\lambda^2 - 1}$$

Η εξίσωση μπορεί να λυθεί επίσης «παραδοσιακά» ως εξής. Η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης $-y'' + y = 0$ είναι $y_\Upsilon = Ae^x + Be^{-x}$, ενώ επιλέγουμε ως μερική λύση της μη ομογενούς την $y_0 = ae^{-\lambda x}$. Αντικαθιστώντας την τελευταία στη μη ομογενή εξίσωση $-y'' + y = e^{-\lambda x}$ βρίσκουμε $a = 1/(1-\lambda^2)$, οπότε η γενική λύση της μη ομογενούς είναι

$$y = y_\Upsilon + y_0 = Ae^x + Be^{-x} + \frac{e^{-\lambda x}}{1-\lambda^2}$$

και από τις συνοριακές συνθήκες βρίσκουμε

$$y(0) = A + B + \frac{1}{1-\lambda^2} = 0 \qquad \text{και} \qquad y(\infty) = Ae^\infty = 0 \;\Rightarrow\; A = 0 \;\Rightarrow\; B = \frac{1}{\lambda^2 - 1}$$

δηλαδή

$$y = \frac{e^{-x}}{\lambda^2 - 1} + \frac{e^{-\lambda x}}{1-\lambda^2} = \frac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{\lambda^2 - 1}$$

(ό.έ.δ.)

Πρόβλημα 5

Έχουμε κατά τα γνωστά ότι

$$\begin{aligned} G_L''(x) + G_L(x) &= 0, \qquad & G_L(0) &= 0 \\ G_R''(x) + G_R(x) &= 0, \qquad & G_R(\pi/2) &= 0 \end{aligned}$$

Η πρώτη από τις παραπάνω εξισώσεις έχει λύση

$$G_L(x) = \alpha \sin x + \beta \cos x, \qquad \text{με} \qquad G_L(0) = \beta = 0$$

δηλαδή

$$G_L(x) = \alpha \sin x$$

ενώ η δεύτερη έχει λύση

$$G_R(x) = \alpha' \sin x + \beta' \cos x, \qquad \text{με} \qquad G_R(\pi/2) = \alpha' = 0$$

δηλαδή

$$G_R(x) = \beta' \cos x$$

Από τις συνθήκες συνάρμοσης, έχουμε

$$G_L(x') = G_R(x') \;\Rightarrow\; \alpha \sin x' = \beta' \cos x'$$

και

$$G'_R(x') - G'_L(x') = 1 \;\Rightarrow\; -\beta' \sin x' - \alpha \cos x' = 1$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα, παίρνουμε

$$\alpha = -\cos x' \text{και} \qquad \beta' = -\sin x'$$

δηλαδή τελικά

$$G(x,x') = \begin{cases} -\cos x' \sin x, & x < x' < \pi/2 \\ -\sin x' \cos x, & x > x' > 0 \end{cases}$$

οπότε η λύση θα γράφεται στη μορφή

$$y(x) = -\cos x \int_0^x \sin x' \, f(x') \, dx' - \sin x \int_x^{\pi/2} \cos x' f(x') \, dx'$$

Για την ειδική περίπτωση $f(x) = 1$, έχουμε

$$y(x) = \cos x (\cos x')|_0^x - \sin x (\sin x')|_x^{\pi/2} = 1 - \cos x - \sin x$$

Η γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης $y'' + y = 1$ (δηλαδή το άθροισμα της γενικής λύσης της ομογενούς και μιας μερικής λύσης της μη ομογενούς) είναι

$$y = \alpha \sin x + \beta \cos x + 1$$

και από τις συνοριακές συνθήκες βρίσκουμε

$$y(0) = \beta + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \beta = -1 \qquad \text{και} \qquad y(\pi/2) = \alpha + 1 \;\Rightarrow\; \alpha = -1$$

δηλαδή

$$y = 1 - \cos x - \sin x$$

(ό.έ.δ.)

Πρόβλημα 7

Για να αποδείξουμε ότι η (1) ικανοποιεί την εξίσωση, θα πρέπει να υπολογίσουμε το y''. Για το y' έχουμε

$$y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}e^{-x}\int_0^x e^{x'}f(x')\,dx' + \frac{1}{2}e^{x}\int_x^\infty e^{-x'}f(x')\,dx'\right)$$

Σύμφωνα με τον κανόνα του Leibniz:

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(x')\,dx' = f\big(v(x)\big)\frac{dv}{dx} - f\big(u(x)\big)\frac{du}{dx}$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{e^{-x}}{2}\int_0^x e^{x'}f(x')\,dx' + \frac{e^{-x}}{2}\big(e^{x}f(x) - e^{0}f(0)\cdot 0\big) \\ &\quad +\frac{e^{x}}{2}\int_x^\infty e^{-x'}f(x')\,dx' + \frac{e^{x}}{2}\big(e^{-\infty}f(\infty)\cdot 0 - e^{-x}f(x)\big) \\ &= -\frac{e^{-x}}{2}\int_0^x e^{x'}f(x')\,dx' + \frac{e^{x}}{2}\int_x^\infty e^{-x'}f(x')\,dx' \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{e^{-x}}{2}\int_0^x e^{x'}f(x')\,dx' - \frac{1}{2}f(x) + \frac{e^{x}}{2}\int_x^\infty e^{-x'}f(x')\,dx' - \frac{1}{2}f(x) \\ &= y(x) - f(x) \qquad (1) \end{aligned}$$

οπότε η εξίσωση ικανοποιείται. Για τις Σ.Σ., έχουμε

$$y'(0) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x'}f(x')\,dx' = y(0)$$

Τι γίνεται με την άλλη συνοριακή συνθήκη;

Για τη συνάρτηση Green, έχουμε κατά τα γνωστά

$$G_L(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{-x}, \qquad \text{με} \qquad G'_L(0) = \alpha - \beta = G_L(0) = \alpha + \beta \;\Rightarrow\; \beta = 0$$

δηλαδή

$$G_L(x) = \alpha e^{x}$$

και

$$G_R(x) = \alpha' e^{x} + \beta' e^{-x}, \qquad \text{με} \qquad G_R(\infty) = 0 \;\Rightarrow\; \alpha' = 0$$

δηλαδή

$$G_R(x) = \beta' e^{-x}$$

Από τις συνθήκες συνάρμοσης, έχουμε

$$G_L(x') = G_R(x') \;\Rightarrow\; \alpha e^{x'} = \beta' e^{-x'} \;\Rightarrow\; \beta' = \alpha e^{2x'}$$

και

$$G'_R(x') - G'_L(x') = -1 \;\Rightarrow\; -\beta' e^{-x'} - \alpha e^{x'} = -1$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα, παίρνουμε

$$\alpha = \frac{e^{-x'}}{2} \qquad \text{και} \qquad \beta' = \frac{e^{x'}}{2}$$

δηλαδή τελικά

$$G(x,x') = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x-x'}, & x < x' \\ \frac{1}{2}e^{x'-x}, & x > x' \end{cases} \qquad \text{ή} \qquad G(x,x') = \frac{1}{2}e^{-|x-x'|}$$