Πρόβλημα 4

Η αναδρομική σχέση γράφεται στη μορφή

$$P_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left[(2n+1)xP_n - nP_{n-1}\right]$$

Για $n = 1$

$$P_2 = \frac{1}{2}(3xP_1 - P_0) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

Για $n = 2$

$$\begin{aligned} P_3 &= \frac{1}{3}(5xP_2 - 2P_1) = \frac{1}{3}\left(5x\frac{1}{2}(3x^2-1) - 2x\right) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{5x3x^2}{3} - \frac{5x}{3} - \frac{4x}{3}) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \end{aligned}$$

Για $n = 3$

$$\begin{aligned} P_4 &= \frac{1}{4}(7xP_3 - 3P_2) = \frac{1}{4}\left(7x\frac{1}{2}(5x^3-3x) - \frac{3}{2}(3x^2-1)\right) \\ &= \frac{1}{8}(35x^4 - 21x^2 - 9x^2 + 3) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \end{aligned}$$

Για $n = 4$

$$\begin{aligned} P_5 &= \frac{1}{5}(9xP_4 - 4P_3) = \frac{1}{5}\left(9x\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) - 4\frac{1}{2}(5x^3 - 3x^2)\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{9x35x^4}{5} - \frac{9x30x^2}{5} + \frac{9x3}{5} - \frac{80x^3}{5} + \frac{48x}{4}\right) \\ &= \frac{1}{8}(63x^5 - 54x^3 + \frac{27x + 48x}{5} - 16x^3) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \end{aligned}$$

Θα αποδείξουμε ενδεικτικά για το P_3 ότι ικανοποιεί τόσο την εξίσωση Legendre όσο και την καθιερωμένη συνθήκη κανονικοποίησης. Έχουμε κατά σειρά

$$\begin{aligned} (1-x^2)P_3'' - 2xP_3' + 12P_3 &= (1-x^2)\frac{1}{2}30x - 2x\frac{1}{2}(15x^2-3) + 6(5x^3-3x) \\ &= 15x - 15x^3 - 15x^3 + 3x + 30x^3 - 18x = 0 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_3^2\,dx &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(25x^6+9x^2-30x^4)\,dx = \frac{1}{4}(25\frac{x^7}{7}+9\frac{x^3}{3}-30\frac{x^5}{5})|_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{4}(\frac{50}{7}+\frac{18}{3}-\frac{60}{5}) = \frac{2}{7} = \frac{2}{2\cdot 3+1}\end{aligned}$$

Πρόβλημα 5

Αναπτύσσουμε διωνυμικά αγνοώντας όρους υψηλότερους από t^3. Δηλαδή, στο z^2 θα αγνοήσουμε τον όρο t^4 και στο z^3 θα αγνοήσουμε όλους τους όρους εκτός από τον $-8x^3t^3$:

$$\begin{aligned}(1+z)^{-1/2} &= (1-2xt+t^2)^{-1/2} = 1+\frac{(-\frac{1}{2})}{1!}(t^2-2xt) \\ &\quad +\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}(t^4+4x^2t^2-4xt^3)+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}(-8x^3t^3+\cdots)+\cdots \\ &= 1+xt+\frac{1}{2}(3x^2-1)t^2+\frac{1}{2}(5x^3-3x)t^3+\cdots\end{aligned}$$

Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι οι συναρτήσεις P_n είναι πολυώνυμα, αφού προκύπτουν από τους όρους $(t^2-2xt)^n$.

Πρόβλημα 8

Το ανάπτυγμα του x^m σε $P_n(x)$ θα περιέχει μόνο τα $P_n(x)$ για τα οποία $n \le m$, δηλαδή τα πολυώνυμα με βαθμό μικρότερο ή ίσο της δύναμης x^m, και επομένως

$$\int_{-1}^{1} x^m P_x(x)\,dx = 0 \qquad \text{όταν } n > m$$

Πρόβλημα 9

Από την Άσκηση 8.8 γνωρίζουμε ότι

$$x^2 = c_0P_0 + c_2P_2$$

(αφού το P_1 θα απουσιάζει, καθότι περιττό), οπότε

$$x^2 = c_0\cdot 1 + c_2\frac{1}{2}(3x^2-1) = c_0 - \frac{c_2}{2} + \frac{3c_2}{2}x^2 \;\Rightarrow\; c_2 = \frac{2}{3} \quad \text{και} \quad c_0 = \frac{c_2}{2} = \frac{1}{3}$$

Ομοίως

$$\begin{aligned} x^3 &= c_1P_1 + c_3P_3 = c_1x + c_3\frac{1}{2}(5x^3-3x) = c_1x + \frac{5c_3}{2}x^3 - \frac{3c_3}{2}x \\ &\Rightarrow \frac{5c_3}{2} = 1 \Rightarrow c_3 = \frac{2}{5} \quad \text{και} \quad c_1 = \frac{3c_3}{2} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Τα c_i υπολογίζονται και μέσω της έκφρασης της σελ. 406.

Πρόβλημα 26

α)

$$\int xJ_0\,dx = \int (xJ_1)'dx = xJ_1 + c$$

β)

$$\begin{aligned} \int x^2J_0\,dx &= \int x(xJ_0)dx = \int x(xJ_1)'dx = xxJ_1 - \int xJ_1\,dx \\ &= x^2J_1 + \int xJ_0'\,dx = x^2J_1 + xJ_0 - \int J_0\,dx + c \end{aligned}$$

γ) Βλ. σελ. 417.
δ)

$$\begin{aligned} \int x^4J_0\,dx &= \int x^3(xJ_0)dx = \int x^3(xJ_1)'dx = x^4J_1 - 3\int x^3J_1\,dx \\ &= x^4J_1 + 3\int x^3J_0'\,dx = x^4J_1 + 3x^3J_0 - 9\int x^2J_0\,dx \\ &= x^4J_1 + 3x^3J_0 - 9x^2J_1 - 9xJ_0 + 9\int J_0\,dx + c \\ &= (x^4-9x^2)J_1 + (3x^3-9x)J_0 + 9\int J_0\,dx + c \end{aligned}$$

Όσον αφορά τον έλεγχο, για τη σχέση (β) π.χ. έχουμε

$$x^2J_0 + J_0 = \frac{d}{dx}(x^2J_1 + xJ_0)$$

δηλαδή μια άρτια συνάρτηση εμφανίζεται ως παράγωγος μιας περιττής, το οποίο ισχύει. Ενώ για τη σχέση (γ) π.χ. θα πρέπει να συμφωνούν ασυμπτωτικά οι ελαχιστοβάθμιοι όροι. Οι όροι αυτοί είναι οι $-4xJ_1$ και $2x^2J_0$, ενώ η ασυμπτωτική μορφή για τα J_n είναι $J_n \sim c_nx^n$, οπότε απαιτούμε

$$-4xc_1x + 2x^2c_0 = -2x^2(2c_1 - c_0) = 0$$

δηλαδή θα πρέπει $c_1 = c_0/2$. Γνωρίζουμε όμως (βλ. Άσκηση 8.25) ότι $c_n = c_{n-1}/2n$, δηλαδή ότι $c_1 = c_0/2$.

Πρόβλημα 31

Πρόβλημα 34

i)

$$\begin{aligned} a(k) &= k u_{\max} \int_0^\infty \rho e^{-\lambda\rho} J_0(k\rho)\, d\rho = \frac{u_{\max}}{k} \int_0^\infty (k\rho) e^{-(\lambda/k)(k\rho)} J_0(k\rho)\, d(k\rho) \\ &\overset{x\to k\rho, \lambda/k\to\mu}{=} \frac{u_{\max}}{k} \int_0^\infty x e^{-\mu x} J_0(x)\, dx = \frac{u_{\max}}{k}(-1)\frac{d}{d\mu}\frac{1}{\sqrt{\mu^2+1}} = \frac{\lambda k u_{\max}}{(k^2+\lambda^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ενδιαμέσως τη σχέση (66) της σελ. 430.

ii)

$$\begin{aligned} a(k) &= k u_{\max} \int_0^\infty \rho e^{-\lambda\rho^2} J_0(k\rho)\, d\rho = \frac{u_{\max}}{k} \int_0^\infty (k\rho) e^{-(\lambda/k^2)(k\rho)^2} J_0(k\rho)\, d(k\rho) \\ &\overset{x\to k\rho, \lambda/k^2\to\mu}{=} \frac{u_{\max}}{k} \int_0^\infty x e^{-\mu x^2} J_0(x)\, dx = \frac{u_{\max}}{k}\frac{1}{2\mu} e^{-1/4\mu} = \frac{k u_{\max}}{2\lambda} e^{-k^2/4\lambda} \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ενδιαμέσως το αποτέλεσμα της Άσκησης 8.31(α).

Πρόβλημα 35

α) Το εκθετικό μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(2xt)^n}{n!} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m t^{2m}}{m!} = \sum_{n,m} \frac{(2x)^n}{n!} \frac{(-1)^m t^{n+2m}}{m!}$$

απ' όπου είναι φανερό ότι οι συντελεστές του εκάστοτε όρου t^{n+2m} για σταθερό $n+2m$ είναι πολυώνυμα του x. Αυτό μπορεί να γίνει σαφέστερο αν θέσουμε $n + 2m = n' \Rightarrow n = n' - 2m$ και αλλάξουμε τις μεταβλητές άθροισης σε n' και m. Για μια τυχούσα τιμή του n', το $2m$ μπορεί να κυμανθεί από 0 έως n', δηλαδή το m θα παίρνει τιμές από 0 έως $n'/2$, οπότε η παραπάνω έκφραση γίνεται

$$\sum_{n'} t^{n'} \left(\sum_{m=0}^{n'/2} \frac{(2x)^{n'-2m}}{(n'-2m)!} \frac{(-1)^m}{m!} \right)$$

β) Θα πρέπει (βλ. Ενότητα 2.2, σελ. 400) η γεννήτρια συνάρτηση $G(x,t) = e^{2xt-t^2}$ να ικανοποιεί τη μερική διαφορική εξίσωση

$$(L_x + L_t)G(x,t) = 0$$

δηλαδή θα πρέπει

$$L_x H_n = \lambda_n H_n \qquad \text{και} \qquad L_t \left(\frac{t^n}{n!} \right) = -\lambda_n \frac{t^n}{n!} \;\Rightarrow\; L_t t^n = -\lambda_n t^n$$

Προκειμένου οι συναρτήσεις H_n να ικανοποιούν την εξίσωση Hermite, θα πρέπει

$$L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial}{\partial x} \qquad \text{και} \qquad \lambda_n = -2n$$

οπότε

$$L_t t^n = 2nt^n \;\Rightarrow\; L_t = 2t\frac{\partial}{\partial t}$$

δηλαδή καταλήγουμε στην απαίτηση η γεννήτρια συνάρτηση να ικανοποιεί την εξίσωση

$$(L_x + L_t)G(x,t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} \right) e^{2xt-t^2} = 0$$

που μπορούμε να επαληθεύσουμε εύκολα ότι ισχύει.

Πρόβλημα 36

Υπολογίζουμε αρχικά το ολοκλήρωμα της τετραγωνισμένης γεννήτριας συνάρτησης στο ίδιο διάστημα $(-\infty, \infty)$ με βάρος e^{-x^2}:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} G^2(x,t)\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{4xt-2t^2}\, dx = e^{2t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-2t)^2}\, dx \\ &= e^{2t^2}\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n t^{2n}}{n!} \qquad (1) \end{aligned}$$

Από το ανάπτυγμα της γεννήτριας συνάρτησης, όμως,

$$G(x,t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} G^2(x,t)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} H_m(x)\frac{t^m}{m!}\right) dx \\ &= \sum_{n,m}\frac{t^{(n+m)}}{n!m!}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x)H_m(x)\,dx \qquad (2)\end{aligned}$$

και αν συγκρίνουμε με το αποτέλεσμα (1), συμπεραίνουμε ότι θα πρέπει

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x)H_m(x)\,dx = I_n\delta_{nm} \qquad \text{όπου} \qquad I_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)\,dx$$

οπότε το αποτέλεσμα (2) γίνεται

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(n!)^2} I_n$$

και εξισώνοντας με το (1), έχουμε τελικά

$$\frac{\sqrt{\pi}2^n}{n!} = \frac{I_n}{(n!)^2} \;\Rightarrow\; I_n = 2^n n!\sqrt{\pi}$$

Πρόβλημα 37

Υποθέτουμε κατ' αρχάς ότι ισχύει για τη γεννήτρια συνάρτηση $G(x,t) = e^{2xt-t^2}$ μια διαφορική εξίσωση του τύπου

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial t} + \gamma\right) G(x,t) = 0$$

οπότε καταλήγουμε ότι θα πρέπει να ισχύει

$$\alpha(2t) + \beta(2x - 2t) + \gamma = 0$$

α) Εάν επιλέξουμε $\alpha = 0$ έχουμε $(2x-2t)\beta + \gamma = 0$, η οποία ικανοποιείται με την επιλογή $\beta = 1$, $\gamma = 2t - 2x$, οπότε τελικά έχουμε

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (2t-2x)\right) G(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + (2t-2x)\right)\sum_{n=0}^{\infty} H_n\frac{t^n}{n!} = 0$$

οπότε για τους συντελεστές του t^n θα πρέπει να ισχύει η σχέση

$$\frac{(n+1)H_{n+1}}{(n+1)!} + 2\frac{H_{n-1}}{(n-1)!} - 2x\frac{H_n}{n!} = 0$$

ή αλλιώς

$$H_{n+1} + 2nH_{n-1} - 2xH_n = 0$$

(β) Εάν επιλέξουμε $\beta = 0$ έχουμε $2\alpha t + \gamma = 0$, η οποία ικανοποιείται με την επιλογή $\alpha = 1$, $\gamma = -2t$, οπότε έχουμε

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - 2t\right) G(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - 2t\right) \sum_{n=0}^{\infty} H_n \frac{t^n}{n!} = 0$$

οπότε για τους συντελεστές του t^n θα πρέπει να ισχύει η σχέση

$$\frac{H_n'}{n!} - 2\frac{H_{n-1}}{(n-1)!} = 0 \Rightarrow H_n' = 2nH_{n-1}$$

Πρόβλημα 39

α) Έστω x^n ο μεγιστοβάθμιος όρος μιας πολυωνυμικής λύσης. Για μεγάλα x, ο μεγιστοβάθμιος αυτός όρος θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση, οπότε θέτοντας $y = x^n$ έχουμε

$$\begin{aligned} n(n-1)x^{n-1} + nx^{n-1} - nx^n + \lambda x^n = 0 \quad &\Rightarrow \quad (\lambda - n)x^n = 0 \\ &\Rightarrow \quad \lambda = n, \qquad n = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

όπου βέβαια αγνοήσαμε τους όρους κατώτερης τάξης x^{n-1}, αφού βρισκόμαστε στην περιοχή των μεγάλων x.

β) Φέρνουμε την εξίσωση στη μορφή Liouville:

$$\mu = \frac{1}{x} \exp\left(\int \frac{1-x}{x} dx\right) = \frac{1}{x} e^{\ln x - x} = e^{-x}$$

οπότε έχουμε

$$e^{-x} x y'' + e^{-x}(1-x)y' + \lambda e^{-x} y = 0$$

οπότε $w = e^{-x}$ και συνεπώς οι λύσεις $L_n(x)$ ικανοποιούν τη σχέση

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x)\, dx = 0, \qquad (n \neq m)$$

Πρόβλημα 40

Το ζητούμενο είναι να δείξουμε ότι η δοθείσα $G(x,t)$ αναπτύσσεται στη μορφή

$$G(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n}{n!}t^n$$

όπου $L_n(x)$ τα πολυώνυμα Laguerre. Για να ισχύει αυτό θα πρέπει (βλ. Ενότητα 2.2, σελ. 400) η δοθείσα $G(x,t)$ να ικανοποιεί τη μερική διαφορική εξίσωση

$$(L_x+L_t)G(x,t)=0$$

όπου

$$L_x L_n=\lambda_n L_n \qquad \text{και} \qquad L_t\left(\frac{t^n}{n!}\right)=-\lambda_n\frac{t^n}{n!}\ \Rightarrow\ L_t t^n=-\lambda_n t^n$$

Προκειμένου οι συναρτήσεις L_n να ικανοποιούν την εξίσωση Laguerre, θα πρέπει

$$L_x=x\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(1-x)\frac{\partial}{\partial x} \qquad \text{και} \qquad \lambda_n=-n$$

οπότε

$$L_t t^n=nt^n\ \Rightarrow\ L_t=t\frac{\partial}{\partial t}$$

δηλαδή καταλήγουμε στην απαίτηση η γεννήτρια συνάρτηση να ικανοποιεί την εξίσωση

$$(L_x+L_t)G(x,t)=\left(x\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(1-x)\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[\frac{1}{1-t}\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)\right]=0$$

που μπορούμε να επαληθεύσουμε εύκολα ότι ισχύει.

α) Υπολογίζουμε αρχικά το ολοκλήρωμα της τετραγωνισμένης γεννήτριας συνάρτησης στο ίδιο διάστημα $(0,\infty)$ με βάρος e^{-x}:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x}G^2(x,t)\,dx &= \int_0^\infty e^{-x}\frac{1}{(1-t)^2}\exp\left(\frac{-2xt}{1-t}\right)dx\\ &= \frac{1}{(1-t)^2}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{1+t}{1-t}x\right)dx\\ &= \frac{1}{(1-t)^2}\frac{1-t}{1+t}=\frac{1}{1-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n} \qquad (1)\end{aligned}$$

Από το ανάπτυγμα της γεννήτριας συνάρτησης, όμως,

$$G(x,t)=\frac{1}{1-t}\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n}{n!}t^n$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x}G^2(x,t)\,dx &= \int_0^\infty e^{-x}\left(\sum_{n=0}^\infty L_n(x)\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^\infty L_m(x)\frac{t^m}{m!}\right)dx \\ &= \sum_{n,m}\frac{t^{(n+m)}}{n!m!}\int_0^\infty e^{-x}L_n(x)L_m(x)\,dx \qquad (2)\end{aligned}$$

και αν συγκρίνουμε με το αποτέλεσμα (1), συμπεραίνουμε ότι θα πρέπει

$$\int_0^\infty e^{-x}L_n(x)L_m(x)\,dx = I_n\delta_{nm} \qquad \text{όπου} \qquad I_n = \int_0^\infty e^{-x}L_n^2(x)\,dx$$

οπότε το αποτέλεσμα (2) γίνεται

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{t^{2n}}{(n!)^2}I_n$$

και εξισώνοντας με το (1), έχουμε τελικά

$$1 = \frac{I_n}{(n!)^2} \Rightarrow I_n = (n!)^2$$

β) Υποθέτουμε ότι ισχύει για τη γεννήτρια συνάρτηση μια διαφορική εξίσωση του τύπου

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial t} + \gamma\right)G(x,t) = 0$$

Επιλέγοντας $\alpha = 0$ έχουμε

$$\left(\beta\frac{1-t-x}{(1-t)^3} + \gamma\frac{1}{1-t}\right)\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = 0 \Rightarrow \beta(1-t-x) + \gamma(1-t)^2 = 0$$

Η εξίσωση αυτή ικανοποιείται με την επιλογή $\beta = (1-t)^2$, $\gamma = t + x - 1$, δηλαδή έχουμε

$$\left((1-t)^2\frac{\partial}{\partial t} + (t+x-1)\right)G(x,t) = \left((1-t)^2\frac{\partial}{\partial t} + (t+x-1)\right)\sum_{n=0}^\infty \frac{L_n}{n!}t^n = 0$$

οπότε για τους συντελεστές του t^n έχουμε

$$\frac{(n+1)L_{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(n-1)L_{n-1}}{(n-1)!} - \frac{2nL_n}{n!} + \frac{L_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{xL_n}{n!} - \frac{L_n}{n!} = 0$$

και τελικά

$$L_{n+1} + (x - 2n - 1)L_n + n^2 L_{n-1} = 0$$

Εν συνεχεία, επιλέγοντας $\beta = 0$ έχουμε

$$\left(\alpha \frac{-t}{(1-t)^2} + \gamma \frac{1}{1-t}\right) \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = 0 \Rightarrow -\alpha t + \gamma(1-t) = 0$$

Η εξίσωση αυτή ικανοποιείται με την επιλογή $\alpha = 1 - t$, $\gamma = t$, δηλαδή έχουμε

$$\left((1-t)\frac{\partial}{\partial x} + t\right) G(x,t) = \left((1-t)\frac{\partial}{\partial x} + t\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n!} t^n = 0$$

οπότε για τους συντελεστές του t^n έχουμε

$$\frac{L_n'}{n!} - \frac{L_{n-1}'}{(n-1)!} + \frac{L_{n-1}}{(n-1)!} = 0$$

και τελικά

$$L_n' - nL_{n-1}' + nL_{n-1} = 0$$