Συμπληρωμα θεωριας Κεφαλαιου 10

Αλγεβρική θεωρία της στροφορμής και του σπιν

Η αλγεβρική μέθοδος λύσης –της οποίας τα βασικά βήματα εκτέθηκαν στο *Συμπλήρωμα θεωρίας* του Κεφαλαίου 7– μπορεί να εφαρμοστεί και στην κβαντομηχανική θεωρία της στροφορμής (τροχιακής ή σπιν) και τα αποτελέσματά της να μας επιτρέψουν μετά να κατασκευάζουμε, εκτός των άλλων, και τις *μήτρες του σπιν* για κάθε δυνατή τιμή του κβαντικού αριθμού s. Όπως στον αρμονικό ταλαντωτή –όπου η μορφή $(x^2+p^2)/2$ της χαμιλτονιανής, μας οδήγησε στην εισαγωγή των τελεστών $a=(x+ip)/\sqrt{2}$ και $a^\dagger=(x-ip)/\sqrt{2}$ στη θέση των x και p– έτσι και στην περίπτωση της στροφορμής η έκφραση

$$\boldsymbol{\ell}^2 = \underbrace{\ell_x^2+\ell_y^2}_{(\ell_x+i\ell_y)(\ell_x-i\ell_y)} + \ell_z^2 \tag{1}$$

μας υποβάλλει την ιδέα, αντί των τελεστών ℓ_x και ℓ_y να χρησιμοποιήσουμε τους

$$\ell_+ = \ell_x + i\ell_y, \qquad \ell_- = \ell_x - i\ell_y, \tag{2}$$

που είναι ο ένας συζυγής του άλλου ($\ell_+^\dagger = \ell_-$), όπως και οι a και $a^\dagger$ στον αρμονικό ταλαντωτή. Δείξτε τα εξής:

α) Ότι οι τελεστές ℓ_+ και ℓ_- ικανοποιούν μεταξύ τους και με τους βασικούς τελεστές $\boldsymbol{\ell}^2$ και ℓ_z, τις μεταθετικές σχέσεις (με $\hbar=1$ παντού)

$$[\ell_+,\ell_-] = 2\ell_z \tag{3}$$

$$[\ell_z,\ell_+] = \ell_+, \qquad [\ell_z,\ell_-] = -\ell_- \tag{4}$$

$$[\ell_\pm,\boldsymbol{\ell}^2] = 0. \tag{5}$$

β) Ότι οι ℓ_+ και ℓ_- δρουν πάνω στις κοινές ιδιοσυναρτήσεις $Y_{\ell m}$ των $\boldsymbol{\ell}^2$ και ℓ_z ως τελεστές αναβίβασης και καταβίβασης της προβολής ℓ_z *κατά μονάδα*, ενώ διατηρούν σταθερό το μέτρο του διανύσματος $\boldsymbol{\ell}$. Αυτό συνεπάγεται ότι ο τελεστής ℓ_z έχει *ισαπέχουσες* ιδιοτιμές, με μεταξύ τους απόσταση ίση με *ένα*.

γ) Η δράση των ℓ_+, ℓ_- πάνω στις *κανονικοποιημένες* ιδιοσυναρτήσεις $Y_{\ell m}$ έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} \ell_+ Y_{\ell m} &= \sqrt{\ell(\ell+1)-m(m+1)}\; Y_{\ell,m+1}, \\ \ell_- Y_{\ell m} &= \sqrt{\ell(\ell+1)-m(m-1)}\; Y_{\ell,m-1}, \end{aligned} \tag{6}$$

όπου ℓ ο κβαντικός αριθμός του μέτρου της στροφορμής, όπως ορίζεται από την εξίσωση ιδιοτιμών $\boldsymbol{\ell}^2 Y_{\ell m} = \ell(\ell+1)Y_{\ell m}$, στην οποία ο αριθμός ℓ –όπως

και ο m στην $\ell_z Y_{\ell m} = m Y_{\ell m}-$ θεωρείται (μέχρι οι τιμές του να προκύψουν από τη λύση) ως ένας τυχόν πραγματικός αριθμός.
Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε (αφού τις αποδείξετε) τις σχέσεις

$$\ell_-\ell_+ = \boldsymbol{\ell}^2 - \ell_z(\ell_z+1), \qquad \ell_+\ell_- = \boldsymbol{\ell}^2 - \ell_z(\ell_z-1).$$

δ) Επικαλεστείτε τις (6) για να συμπεράνετε ότι ο κβαντικός αριθμός m φράσσεται προς τα πάνω και προς τα κάτω από τις τιμές

$$m_{\max} = \ell, \qquad m_{\min} = -\ell \tag{7}$$

και επειδή το διάστημα από $-\ell$ έως $+\ell$ καλύπτεται με μοναδιαία βήματα, το μήκος του, 2ℓ, θα είναι υποχρεωτικά ακέραιος αριθμός και άρα το ℓ *ακέραιος ή ημιακέραιος*. Επιχειρηματολογείστε κατόπιν γιατί οι ημιακέραιες τιμές ($\ell = 1/2, 3/2, \ldots$) δεν είναι δεκτές για την τροχιακή στροφορμή, αλλά δεν μπορούν να αποκλειστούν ως δυνατές τιμές του κβαντικού αριθμού s του σπιν.

ε) Σκεφτείτε πώς μπορούν να εφαρμοστούν τα παραπάνω –και ειδικότερα οι τύποι (6)– για να κατασκευαστούν οι μήτρες που αντιπροσωπεύουν τους τελεστές s_x, s_y, s_z του σπιν, για τυχόν s. Εφαρμόστε τη μέθοδο που προτείνετε για $s = 1/2$ και $s = 1$ και συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με εκείνα που δώσαμε στο κείμενο (σελ. 442) και στο Πρόβλημα Β.9.

στ) Δείξτε πώς μπορούν να κατασκευαστούν οι σφαιρικές αρμονικές $Y_{\ell m}$ με την παραπάνω «τεχνολογία», και υπολογίστε κατόπιν –με έναν καθαρά αλγεβρικό τρόπο– τις μέσες τιμές $\langle \ell_x^2 \rangle$ και $\langle \ell_y^2 \rangle$, καθώς και τις αντίστοιχες αβεβαιότητες $\Delta\ell_x$ και $\Delta\ell_y$ σε μια τυχούσα ιδιοκατάσταση $Y_{\ell m}$.

Λύση

α) Με αφετηρία τις σχέσεις ορισμού των ℓ_+, ℓ_-

$$\ell_+ = \ell_x + i\ell_y, \qquad \ell_- = \ell_x - i\ell_y$$

θα έχουμε (με $\hbar = 1$ παντού)

$$\begin{aligned}
[\ell_+, \ell_-] &= [\ell_x + i\ell_y, \ell_x - i\ell_y] = \big[\ell_x, (-i\ell_y)\big] + \big[(i\ell_y), \ell_x\big] \\
&= -i\,[\ell_x, \ell_y] + i\,[\ell_y, \ell_x] \\
&= -i \cdot i\ell_z + i\,(-i\ell_z) = 2\ell_z \qquad \text{ό.έ.δ.},
\end{aligned}$$

όπου στα παραπάνω παραλείψαμε, βεβαίως, μεταθέτες του τύπου $[\ell_x, \ell_x]$ ή $[\ell_y, \ell_y]$ που, προφανώς, μηδενίζονται. Εντελώς ανάλογα, θα είναι

$$\begin{aligned}
[\ell_z, \ell_+] &= [\ell_z, \ell_x + i\ell_y] = [\underbrace{\ell_z, \ell_x}_{i\ell_y}] + i[\underbrace{\ell_z, \ell_y}_{-i\ell_x}] \\
&= i\ell_y + i(-i\ell_x) = \ell_x + i\ell_y \equiv \ell_+
\end{aligned}$$

και επίσης

$$[\ell_z, \ell_-] = [\ell_z, \ell_x - i\ell_y] = [\underbrace{\ell_z, \ell_x}_{i\ell_y}] - i\,[\underbrace{\ell_z, \ell_y}_{-i\ell_x}]$$

$$= i\ell_y - i(-i\ell_x) = i\ell_y - \ell_x = -\ell_- \qquad \text{ό.έ.δ.}$$

ενώ η $[\ell_\pm, \boldsymbol{\ell}^2] = 0$ είναι προφανής, αφού όλες οι συνιστώσες του $\boldsymbol{\ell}$ $-\ell_x, \ell_y$ και ℓ_z- μετατίθενται με το $\boldsymbol{\ell}^2$.

β) Ο ρόλος των ℓ_+ και ℓ_- ως τελεστών αναβίβασης και καταβίβασης ως προς το φάσμα της προβολής ℓ_z απορρέει από τις μεταθετικές σχέσεις

$$[\ell_z, \ell_+] = \ell_+, \qquad [\ell_z, \ell_-] = -\ell_-, \tag{8}$$

που είναι ουσιαστικά ταυτόσημες με τις αντίστοιχες του αρμονικού ταλαντωτή

$$[H, a^\dagger] = a^\dagger, \qquad [H, a] = -a$$

μόνο που τον ρόλο της χαμιλτονιανής H τον παίζει τώρα η συνιστώσα ℓ_z της στροφορμής. Επιπλέον, επειδή είναι $[\ell_\pm, \boldsymbol{\ell}^2] = 0$, οι τελεστές $\ell_\pm$ αλλάζουν μόνο την προβολή ℓ_z του $\boldsymbol{\ell}$ αλλά όχι το μέτρο του. Αν, ειδικότερα, συμβολίσουμε με $Y_{\ell m}$ τις κοινές ιδιοσυναρτήσεις των $\boldsymbol{\ell}^2$ και ℓ_z, θα είναι εξ ορισμού (με $\hbar = 1$ πάντα)

$$\ell_z Y_{\ell m} = m Y_{\ell m}, \qquad \boldsymbol{\ell}^2 Y_{\ell m} = \ell(\ell+1) Y_{\ell m}, \tag{9}$$

όπου τα m και ℓ υποτίθενται αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί που θα προσδιοριστούν στη συνέχεια.

Αφήνοντας τώρα τα δύο μέλη των (8) να δράσουν πάνω στην ιδιοσυνάρτηση $Y_{\ell m}$, παίρνουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
& (\ell_z\ell_+ - \ell_+\ell_z) Y_{\ell m} = \ell_+ Y_{\ell m} \\
\Rightarrow\quad & \ell_z(\ell_+ Y_{\ell m}) - \ell_+(\ell_z Y_{\ell m}) = \ell_+ Y_{\ell m} \\
\Rightarrow\quad & \ell_z(\ell_+ Y_{\ell m}) - \ell_+(m Y_{\ell m}) = \ell_+ Y_{\ell m} \\
\Rightarrow\quad & \ell_z(\ell_+ Y_{\ell m}) - m(\ell_+ Y_{\ell m}) = \ell_+ Y_{\ell m} \\
\Rightarrow\quad & \ell_z(\ell_+ Y_{\ell m}) = (m+1)(\ell_+ Y_{\ell m}),
\end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει ότι η συνάρτηση $\ell_+ Y_{\ell m}$ είναι πάλι ιδιοσυνάρτηση του ℓ_z με ιδιοτιμή $m+1$. Θα είναι δηλαδή

$$\ell_+ Y_{\ell m} \sim Y_{\ell, m+1} \tag{10}$$

εφόσον $-$λόγω και της $[\ell_+, \boldsymbol{\ell}^2] = 0-$ δεν υπάρχει αλλαγή στον κβαντικό αριθμό ℓ. (Αν δεν αισθάνεστε βέβαιοι γι' αυτό, αποδείξτε το.)

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο προκύπτει ότι

$$\ell_- Y_{\ell m} \sim Y_{\ell, m-1}, \tag{11}$$

οπότε ο ρόλος των ℓ_+ και ℓ_- ως τελεστών αναβίβασης και καταβίβασης της προβολής ℓ_z είναι πλέον αποδεδειγμένος.

γ) Αν θέλουμε τώρα οι $Y_{\ell m}$ και $Y_{\ell,m\pm1}$ στις (10) και (11) να είναι κανονικοποιημένες κυματοσυναρτήσεις θα πρέπει να γράψουμε

$$\ell_+ Y_{\ell m} = c_{\ell m}^{(+)}\, Y_{\ell,m+1}, \qquad \ell_- Y_{\ell m} = c_{\ell m}^{(-)}\, Y_{\ell,m-1}, \tag{12}$$

όπου $c_{\ell m}^{(\pm)}$ προσδιοριστέοι αριθμητικοί συντελεστές που υπολογίζονται παίρνοντας τα μήκη των δύο μελών, οπότε θα είναι

$$c_{\ell m}^{(\pm)} = \|\ell_\pm Y_{\ell m}\|.$$

Ειδικότερα για τον συντελεστή $c_{\ell m}^{(+)}$ θα έχουμε

$$|c_{\ell m}^{(+)}|^2 = (\ell_+ Y_{\ell m}, \ell_+ Y_{\ell m}) = (Y_{\ell m}, \ell_+^\dagger \ell_+ Y_{\ell m}) = (Y_{\ell m}, \ell_- \ell_+ Y_{\ell m})$$

όπου, βέβαια, χρησιμοποιήσαμε τη γενική ιδιότητα κάθε τελεστή να μεταφέρεται από το ένα διάνυσμα ενός εσωτερικού γινομένου στο άλλο μετατρεπόμενος στον συζυγή του, σε συνδυασμό με την προφανή ιδιότητα $\ell_+^\dagger = \ell_-$. Όσον αφορά το γινόμενο $\ell_-\ell_+$, θα είναι

$$\begin{aligned}
\ell_-\ell_+ &= (\ell_x - i\ell_y)(\ell_x + i\ell_y) = \ell_x^2 + \ell_y^2 + i(\ell_x\ell_y - \ell_y\ell_x) \\
&= \ell_x^2 + \ell_y^2 + i[\ell_x, \ell_y] = (\boldsymbol{\ell}^2 - \ell_z^2) + i(i\ell_z) \\
&= \boldsymbol{\ell}^2 - \ell_z^2 - \ell_z \equiv \boldsymbol{\ell}^2 - \ell_z(\ell_z + 1)
\end{aligned}$$

και επομένως

$$\begin{aligned}
\ell_-\ell_+ Y_{\ell m} &= \big(\boldsymbol{\ell}^2 - \ell_z(\ell_z + 1)\big) Y_{\ell m} \\
&= \ell(\ell+1) Y_{\ell m} - \ell_z^2 Y_{\ell m} - \ell_z Y_{\ell m} \\
&= \ell(\ell+1) Y_{\ell m} - m^2 Y_{\ell m} - m Y_{\ell m} \\
&\equiv \big(\ell(\ell+1) - m(m+1)\big) Y_{\ell m},
\end{aligned}$$

οπότε η έκφραση $|c_{\ell m}^{(+)}|^2 = (Y_{\ell m}, \ell_-\ell_+ Y_{\ell m})$ θα δώσει

$$\begin{aligned}
&|c_{\ell m}^{(+)}|^2 = \ell(\ell+1) - m(m+1) \\
\Rightarrow \quad & c_{\ell m}^{(+)} = \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m+1)}
\end{aligned}$$

και με τον ίδιο τρόπο

$$c_{\ell m}^{(-)} = \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m-1)},$$

οπότε οι (12) θα γράφονται τελικά ως

$$\ell_+ Y_{\ell m} = \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m+1)}\ \ Y_{\ell,m+1} \tag{13}$$

$$\ell_- Y_{\ell m} = \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m-1)}\ \ Y_{\ell,m-1}, \tag{14}$$

που είναι οι σχέσεις που θέλαμε να αποδείξουμε.

δ) Από τα προηγούμενα είναι τώρα φανερό ότι η συνεχής δημιουργία νέων ιδιοσυναρτήσεων του ℓ_z με δράση των τελεστών ℓ_+ και ℓ_- μπορεί να τερματιστεί μόνο όταν

$$\ell_+ Y_{\ell,m_{\max}} = 0, \qquad \ell_- Y_{\ell,m_{\min}} = 0,$$

όπου $m_{\max}$ η *μέγιστη* και $m_{\min}$ η *ελάχιστη* ιδιοτιμή του ℓ_z αντίστοιχα. Όμως από τις (13) και (14) φαίνεται αμέσως ότι αυτό θα συμβεί μόνο αν είναι

$$m_{\max} = \ell, \qquad m_{\min} = -\ell,$$

οπότε η δράση των ℓ_+ και ℓ_- θα δώσει πράγματι μηδέν και η περαιτέρω δημιουργία νέων ιδιοσυναρτήσεων σταματάει εκεί.

Οι ιδιοτιμές του ℓ_z θα ξεκινούν λοιπόν από την ελάχιστη ιδιοτιμή $m = -\ell$ και −προχωρώντας με βήμα μονάδα− θα τερματίζονται στη μέγιστη δυνατή τιμή $m = \ell$. Αφού όμως το διάστημα από $-\ell$ έως ℓ καλύπτεται πλήρως με μοναδιαία βήματα, το μήκος του −που ισούται, προφανώς, με 2ℓ− θα πρέπει να είναι ένας ακέραιος αριθμός (ή μηδέν). Θα πρέπει να είναι δηλαδή

$$\begin{aligned} & 2\ell = \text{ακέραιος αριθμός} \\ \Rightarrow \quad & \ell = \text{ακέραιος ή ημιακέραιος} \\ & \quad = \{0,1,2,3,\ldots\} \text{ ή } \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \cdots\right\}. \end{aligned}$$

Προκειμένου περί της τροχιακής στροφορμής οι ημιακέραιες τιμές απορρίπτονται, όπως ήδη γνωρίζουμε, διότι τότε η εξάρτηση, $e^{im\varphi}$, της κυματοσυνάρτησης από τη γωνία φ, δεν θα αντιστοιχούσε σε μονότιμη συνάρτηση του χώρου. (Για $m \neq$ ακεραίου, ύστερα από μια στροφή κατά 2π ($\varphi \to \varphi + 2\pi$) η κυματοσυνάρτηση δεν θα επανερχόταν στην αρχική της τιμή.)

Όμως οι ημιακέραιες τιμές δεν μπορούν να αποκλειστούν ως δυνατές τιμές του κβαντικού αριθμού s του σπιν, διότι το σπιν δεν συνδέεται με κανενός είδους χωρική κίνηση του σωματιδίου και επομένως η απαίτηση του μονότιμου της κυματοσυνάρτησής του δεν έχει πια θέση.

ε) Σύμφωνα με τη σχετική συζήτηση του Κεφ. 3 (σελ. 170), κάθε κβαντομηχανικός τελεστής A μπορεί να παρασταθεί από μια κατάλληλη μήτρα με στοιχεία

$$A_{nm} = (\psi_n, A\psi_m), \tag{15}$$

όπου ψ_n $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ ένα πλήρες σύστημα ορθογώνιων (και κανονικοποιημένων) ιδιοσυναρτήσεων. Δεδομένου ακόμα ότι τα εσωτερικά γινόμενα της μορφής

$$c_n = (\psi_n, \psi)$$

παριστάνουν τις *συντεταγμένες* του διανύσματος ψ στη βάση των ιδιοδιανυσμάτων ψ_n, η έκφραση (15) για τα στοιχεία μήτρας του A μπορεί να περιγραφεί ως εξής: Η μήτρα του τελεστή A σχηματίζεται βάζοντας ως διαδοχικές της στήλες τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $A\psi_m$ που προκύπτουν από τη δράση του τελεστή A πάνω στα διανύσματα ψ_m της βάσης.

Στην περίπτωση ενός σωματιδίου με $s = 1/2$, τα διανύσματα της βάσης είναι, βεβαίως, τα

$$X_+ \equiv Y_{1/2,1/2}, \qquad X_- \equiv Y_{1/2,-1/2}$$

και η δράση των τελεστών $s_\pm$ και s_z πάνω σε αυτά θα έχει τη μορφή

$$s_+X_+ = 0 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s_+X_- = X_+ \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$s_-X_+ = X_- \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad s_-X_- = 0 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

και

$$s_zX_+ = \frac{1}{2}X_+ \equiv \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s_zX_- = -\frac{1}{2}X_- \equiv -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

όπου ο αριθμητικός συντελεστής στις (16) και (17) προέκυψε, βεβαίως, με εφαρμογή των (13) και (14) για $s = 1/2$ και $\mu = \pm 1/2$ κατά περίπτωση. Από τις (16) και (17) συνάγεται αμέσως ότι η μήτρες των τελεστών s_+ και s_- θα είναι οι

$$s_+ = \begin{array}{c} \begin{matrix} s_+X_+ & s_+X_- \\ \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \qquad s_- = \begin{array}{c} \begin{matrix} s_-X_+ & s_-X_- \\ \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \qquad s_z = \begin{array}{c} \begin{matrix} s_zX_+ & s_zX_- \\ \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

και δεδομένου ότι

$$s_+ = s_x + is_y, \qquad s_- = s_x - is_y$$

$$\Rightarrow \quad s_x = \frac{s_+ + s_-}{2}, \qquad s_y = \frac{s_+ - s_-}{2i},$$

οι μήτρες για τους τελεστές s_x και s_y θα προκύπτουν ως

$$s_x = \frac{1}{2}s_+ + \frac{1}{2}s_- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$s_y = \frac{1}{2i}(s_+ - s_-) = \frac{1}{2i}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

οπότε η τριάδα των μητρών του σπιν $-$για $s = 1/2-$ θα είναι η

$$s_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad s_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad s_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

και βεβαίως συμπίπτει με εκείνη που δώσαμε στο κείμενο (σελ. 442 με $\hbar = 1$).

Για $s=1$ τα βασικά διανύσματα είναι, βεβαίως, τα

$$X_+ \equiv X_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X_0 \equiv X_{1,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X_- \equiv X_{1,-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

και η δράση του τελεστή s_+ πάνω τους θα παίρνει τη μορφή

$$s_+X_+ = 0 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_+X_0 = \sqrt{2}\, X_+ \equiv \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_+X_- = \sqrt{2}\, X_0 \equiv \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

όπου ο παράγοντας $\sqrt{2}$ προέκυψε –κατά τα γνωστά– με εφαρμογή της (13) για $s=1$ και $\mu=0$ ή $\mu=-1$. Τοποθετώντας τα τρία παραπάνω διανύσματα ως διαδοχικές στήλες μιας μήτρας, παίρνουμε

$$s_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow s_- = s_+^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad s_x = \frac{1}{2}\,(s_+ + s_-) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

και

$$s_y = \frac{1}{2i}\,(s_+ - s_-) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

ενώ, βέβαια, για τον τελεστή s_z θεωρούμε προφανές ότι θα έχει τη διαγώνια μορφή

$$s_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του, $1, 0, -1$, αρχίζοντας από τη μεγαλύτερη και πηγαίνοντας προς τη μικρότερη, αφού με αυτή τη σειρά έχουν διαταχθεί και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα X_+, X_0 και X_-. Το γεγονός αυτό –ότι δηλαδή ο s_z έχει διαγώνια μορφή με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του– είναι, βεβαίως, πολύ γενικό. Πράγματι, από τη σχέση $A_{nm} = (\psi_n, A\psi_m)$ φαίνεται αμέσως ότι αν η βάση ψ_n συμπίπτει με τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή A –είναι δηλαδή $A\psi_n = a_n\psi_n$– τότε θα έχουμε

$$A_{nm} = (\psi_n, A\psi_m) = (\psi_n, a_m\psi_m) = a_m(\psi_n, \psi_m),$$

από όπου είναι φανερό –λόγω της ορθογωνιότητας των ιδιοσυναρτήσεων ψ_n– ότι όλα τα μη διαγώνια στοιχεία μήτρας του τελεστή A θα μηδενίζονται και τα επί της διαγωνίου θα ισούνται με τις ιδιοτιμές του.

στ) Για την κατασκευή των ιδιοσυναρτήσεων $Y_{\ell m}$ θα πρέπει να ξεκινήσουμε από την κατάσταση μέγιστης (ή ελάχιστης) προβολής $Y_{\ell\ell}$ (ή $Y_{\ell,-\ell}$) που ικανοποιεί την απλή *εξίσωση τερματισμού*

$$\ell_+ Y_{\ell\ell} = 0$$

η οποία με βάση τις εκφράσεις των τελεστών ℓ_x και ℓ_y σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\ell_x = i\left(\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{\tan\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \qquad \ell_y = i\left(-\cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\varphi}{\tan\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \ell_+ = e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{i}{\tan\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$

γράφεται ως

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{i}{\tan\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) Y_{\ell\ell}\,(\theta,\varphi) = 0. \tag{17}$$

Δεδομένου ακόμα ότι

$$\ell_z\, Y_{\ell\ell} = \ell Y_{\ell\ell} \;\;\Rightarrow\;\; -i\,\frac{\partial Y_{\ell\ell}}{\partial\varphi} = \ell Y_{\ell\ell},$$

η εξάρτηση της Y από τη γωνία φ θα έχει τη γνωστή μορφή $e^{i\ell\varphi}$, οπότε θα είναι

$$Y_{\ell\ell}(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)e^{i\ell\varphi}.$$

Έτσι η (17) θα γράφεται τελικά ως

$$\Theta' - \frac{\ell}{\tan\theta}\Theta = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\Theta'}{\Theta} = \frac{\ell}{\tan\theta} = \ell\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \ell\,\frac{(\sin\theta)'}{\sin\theta}$$

και ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη ως προς θ παίρνουμε

$$\ln\Theta = \ell\ln\sin\theta = \ln(\sin^\ell\theta)$$

$$\Rightarrow \;\; \Theta(\theta) = \sin^\ell\theta$$

$$\Rightarrow \;\; Y_{\ell\ell}(\theta,\phi) = N\sin^\ell\theta e^{i\ell\varphi}$$

με την αναμενόμενη, βέβαια, απροσδιοριστία μιας πολλαπλασιαστικής σταθεράς N, που υπολογίζεται από τη συνθήκη κανονικοποίησης $\int |Y_{\ell\ell}|^2 d\Omega = 1$ και προκύπτει ίση με $N = N_\ell = \sqrt{(2\ell+1)!}/(\sqrt{4\pi}\cdot 2^\ell\cdot \ell!)$. Έτσι θα είναι τελικά

$$Y_{\ell\ell} = \frac{\sqrt{(2\ell+1)!}}{\sqrt{4\pi}\cdot 2^\ell \cdot \ell!} \sin^\ell \theta e^{i\ell\varphi}, \tag{18}$$

οπότε όλες οι άλλες ιδιοσυναρτήσεις $Y_{\ell m}$ θα προκύπτουν από την (18) με δράση του τελεστή καταβίβασης

$$\ell_- = e^{-i\varphi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{i}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

και θα είναι επίσης κανονικοποιημένες αν χρησιμοποιηθεί η γνωστή σχέση

$$\ell_- Y_{\ell m} = \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m-1)}\, Y_{\ell,m-1}$$

με τον συγκεκριμένο αριθμητικό συντελεστή. (Κάντε μόνοι σας ως παράδειγμα την περίπτωση $\ell = 1$.)

Για τον υπολογισμό μιας μέσης τιμής του τύπου

$$\langle \ell_x^2 \rangle = (Y_{\ell m}, \ell_x^2\, Y_{\ell m})$$

χρειαζόμαστε, προφανώς, το αποτέλεσμα της δράσης του τελεστή ℓ_x^2 πάνω στις ιδιοσυναρτήσεις $Y_{\ell m}$. Γι' αυτό το σκοπό λύνουμε τις σχέσεις

$$\ell_+ = \ell_x + i\ell_y, \qquad \ell_- = \ell_x - i\ell_y$$

ως προς ℓ_x και παίρνουμε

$$\ell_x = \frac{1}{2}\,(\ell_+ + \ell_-)$$

και για το τετράγωνο του ℓ_x

$$\ell_x^2 = \frac{1}{4}\,(\ell_+ + \ell_-)(\ell_+ + \ell_-) = \frac{1}{4}\,(\ell_+^2 + \ell_-^2 + \ell_+\,\ell_- + \ell_-\,\ell_+),$$

όπου για τον υπολογισμό του $\langle \ell_x^2 \rangle$ μας χρειάζονται μόνο οι δύο τελευταίοι όροι $-\ell_+\ell_-$ και $\ell_-\ell_+-$ που δεν αλλάζουν την τιμή της προβολής m, αντίθετα με τους δύο πρώτους που τη μεταβάλλουν κατά ± 2, οπότε η συμβολή τους στη μέση τιμή θα είναι μηδενική λόγω ορθογωνιότητας των κυματοσυναρτήσεων που προκύπτουν. Θα είναι λοιπόν

$$\langle \ell_x^2 \rangle = \frac{1}{4}\,\big(Y_{\ell m}, (\ell_+\,\ell_- + \ell_-\,\ell_+)Y_{\ell m}\big),$$

όπου

$$\begin{aligned}
\ell_+\ell_- Y_{\ell m} &= \ell_+\big(\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m-1)}\, Y_{\ell,m-1}\big) = \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m-1)}\, \ell_+ Y_{\ell,m-1} \\
&= \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m-1)}\ \sqrt{\ell(\ell+1) - (m-1)(m-1+1)}\, Y_{\ell m} \\
&= \big(\ell(\ell+1) - m(m-1)\big) Y_{\ell m}
\end{aligned}$$

και παρόμοια,

$$\begin{aligned}\ell_-\ell_+Y_{\ell m} &= \ell_-\big(\sqrt{\ell(\ell+1)-m(m+1)}\;Y_{\ell,m+1}\big) = \sqrt{\ell(\ell+1)-m(m+1)}\;\ell_-Y_{\ell,m+1}\\ &= \sqrt{\ell(\ell+1)-m(m+1)}\;\sqrt{\ell(\ell+1)-(m+1)(m+1-1)}\;Y_{\ell m}\\ &= \big(\ell(\ell+1)-m(m+1)\big)Y_{\ell m},\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}\langle \ell_x^2\rangle &= \frac{1}{4}\Big\{\big(\ell(\ell+1)-m(m-1)\big)+\big(\ell(\ell+1)-m(m+1)\big)\Big\}\\ &= \frac{1}{2}\left(\ell(\ell+1)-m^2\right)\end{aligned}$$

ενώ, για λόγους συμμετρίας, αναμένεται να είναι επίσης

$$\langle \ell_y^2\rangle = \langle \ell_x^2\rangle = \frac{\ell(\ell+1)-m^2}{2}.$$

Για τις αντίστοιχες αβεβαιότητες $\Delta\ell_x$ και $\Delta\ell_y$ χρειαζόμαστε επίσης και τις μέσες τιμές

$$\langle \ell_x\rangle = (Y_{\ell m},\ell_x Y_{\ell m}), \qquad \langle \ell_y\rangle = (Y_{\ell m},\ell_y Y_{\ell m})$$

οι οποίες όμως σίγουρα μηδενίζονται για λόγους που πρέπει να σας είναι ήδη πολύ φανεροί. (Αν όχι, αποδείξτε το.) Με $\langle \ell_x\rangle = \langle \ell_y\rangle = 0$ θα είναι λοιπόν

$$(\Delta\ell_x)^2 = \langle \ell_x^2\rangle \;\Rightarrow\; \Delta\ell_x = \sqrt{\frac{\ell(\ell+1)-m^2}{2}} = \Delta\ell_y.$$

Διαπιστώνουμε έτσι αυτό που ήδη έχουμε επισημάνει: ότι στην κατάσταση καθορισμένης προβολής στον άξονα z οι δύο άλλες συνιστώσες της στροφορμής, παρ' ότι έχουν μέση τιμή μηδέν, έχουν εντούτοις ισχυρές κβαντικές διακυμάνσεις γύρω από αυτήν, και εκεί ακριβώς οφείλονται οι ασυνήθιστες ιδιότητες του διανύσματος της στροφορμής στην κβαντομηχανική. Παραδείγματος χάριν, η γνωστή αδυναμία του να ευθυγραμμιστεί πλήρως με έναν άξονα. Ακόμα και στην κατάσταση μέγιστης προβολής του προς αυτόν, το διάνυσμα $\boldsymbol{\ell}$ σχηματίζει γωνία μαζί του. Υπολογίστε αυτή τη γωνία για ένα τυχόν ℓ –και, βέβαια, με $m=\ell$– και εξετάστε τι κάνει για μεγάλα ℓ. Ποια είναι η πρόβλεψή σας;