# Συμπληρωμα θεωριας Κεφαλαιου 2

## Η συνθήκη κβάντωσης Bohr - Sommerfeld

α) Μετά την επιτυχή εφαρμογή της συνθήκης κβάντωσης του Bohr στο άτομο του υδρογόνου ο Sommerfeld –σε συνεργασία με τον Bohr– πρότεινε την ακόλουθη γενίκευσή της

$$\oint p\, dq = nh \tag{1}$$

που είναι γνωστή ως η *συνθήκη κβάντωσης Bohr - Sommerfeld*. Για τον αναγνώστη –δηλαδή την πλειονότητα των αναγνωστών– που δεν έχει παρακολουθήσει ένα προχωρημένο μάθημα κλασικής μηχανικής, ας σημειώσουμε ότι το ολοκλήρωμα του πρώτου μέλους της (1) –γνωστό ως *ολοκλήρωμα της δράσης*– αφορά μια κλειστή περιοδική τροχιά (εξ ου και το «κυκλάκι» στο σύμβολο της ολοκλήρωσης) ενώ τα $q$ και $p$ είναι ένα από τα συνήθη ζεύγη *συζυγών μεταβλητών* της κλασικής μηχανικής· $(x, p_x)$, $(y, p_y), \ldots (\phi, \ell_z)$ κ.ο.κ. Ειδικότερα για $q = \phi$ (=γωνία στροφής περί τον άξονα $z$), οπότε είναι $p = \ell_z$ (=σταθερά για ένα κεντρικό δυναμικό), η (1) παίρνει τη μορφή

$$\oint \ell_z\, d\phi = \ell_z \oint d\phi = \ell_z \cdot 2\pi = nh$$

$$\Rightarrow \quad \ell_z = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

που δεν είναι παρά η συνήθης συνθήκη του Bohr.

Δείξτε τώρα ότι για μια μονοδιάστατη κίνηση σε ένα τυχόν δυναμικό $V(x)$ –και ειδικότερα για καταστάσεις δέσμιας κίνησης– η (1) παίρνει τη μορφή

$$2\int_{x_1}^{x_2} p\, dx = 2\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m\big(E - V(x)\big)}\; dx = nh \tag{2}$$

όπου $x_1, x_2$ τα όρια της κλασικής κίνησης στο δυναμικό $V(x)$ για τη δεδομένη ενέργεια $E$. Εφαρμόστε την (2) για τον αρμονικό ταλαντωτή $-V(x) = kx^2/2-$ και υπολογίστε τις επιτρεπόμενες τιμές της ενέργειας του σωματιδίου.

β) Δείξτε ότι η συνθήκη κβάντωσης Bohr - Sommerfeld για μια μονοδιάστατη κίνηση –εξίσωση (2) του προηγούμενου ερωτήματος– μπορεί να προκύψει και ως συνέπεια της συνθήκης δημιουργίας στάσιμων κυμάτων στο διάστημα $L = x_2 - x_1$ της κλασικής κίνησης του σωματιδίου. Η βασική σκέψη είναι να χρησιμοποιήσετε ως $p$ τη μέση ορμή $\overline{p} = \overline{p(x)}$, όπως ορίζεται με τον γνωστό τρόπο

$$\overline{p} = \frac{1}{L}\int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx$$

και με ένα αντίστοιχο μέσο μήκος κύματος $\lambda = h/\overline{p}$.

## *Λύση*

α) Δεδομένου ότι σε μια πεπερασμένη μονοδιάστατη κίνηση, μέσα σε κάθε περίοδο το σωματίδιο διατρέχει δύο φορές το διάστημα $[x_1, x_2]$ ανάμεσα στα όρια της κλασικής ταλάντωσης, το ολοκλήρωμα της δράσης σε μια πλήρη περίοδο θα είναι το διπλάσιο του ίδιου ολοκληρώματος στο διάστημα $[x_1, x_2]$. Στη μονοδιάστατη περίπτωση, η συνθήκη κβάντωσης Bohr - Sommerfeld θα γράφεται λοιπόν ως

$$2\int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx = nh \tag{3}$$

οπότε, αν λάβουμε υπ' όψιν και τη σχέση ορισμού της ενέργειας,

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad \Rightarrow \quad p = p(x) = \sqrt{2m\big(E - V(x)\big)}\ ,$$

η (3) θα γράφεται, τελικά, ως

$$2\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m\big(E - V(x)\big)}\,dx = nh. \tag{4}$$

Αν επιπλέον –όπως συμβαίνει συνήθως– το δυναμικό $V(x)$ είναι συμμετρικό ως προς την αρχή ($V(-x) = V(x)$), τότε θα είναι επίσης συμμετρικά ως προς την αρχή και τα όρια $x_1$ και $x_2$ της κλασικής ταλάντωσης. Θα είναι δηλαδή $x_1 = -a$, $x_2 = +a$, οπότε η (4) θα παίρνει την ειδικότερη μορφή

$$2\int_{-a}^{a} \sqrt{2m\big(E - V(x)\big)}\,dx = 2\int_{-a}^{a} \sqrt{2m\big(V(a) - V(x)\big)}\,dx = nh, \tag{5}$$

στην οποία αντικαταστήσαμε επίσης την ενέργεια $E$ με την τιμή της δυναμικής ενέργειας στο άκρο του διαστήματος ταλάντωσης. Σε αυτή την τελική μορφή της είναι φανερό ότι η (5) θα προσδιορίσει μια διάκριτη ακολουθία τιμών του $a$ ($a = a_n$) η οποία θα εισαχθεί μετά στη σχέση $E = E(a)$, για να μας δώσει την ακολουθία των επιτρεπόμενων ενεργειών, $E_n = V(a_n)$, του προβλήματος.

Για τον αρμονικό ταλαντωτή –όπου $V = \frac{1}{2}\,kx^2 = \frac{1}{2}\,m\omega^2 a^2$ (αφού $\omega = \sqrt{k/m}$)– η (5) θα δώσει

$$2\int_{-a}^{+a}\sqrt{2m\left(\frac{1}{2}m\omega^2a^2-\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)}\,dx=nh$$

$$\Rightarrow\ 2m\omega\int_{-a}^{+a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=nh$$

$$\Rightarrow\ 2m\omega\cdot\frac{\pi a^2}{2}=nh \tag{6}$$

και δεδομένου ότι $E=\frac{1}{2}m\omega^2a^2$, η (6) δίνει αμέσως

$$E_n=n\hbar\omega,$$

που δεν είναι παρά η συνθήκη κβάντωσης του Planck για ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο συχνότητας $\omega$. Και η σύμπτωση δεν είναι, βεβαίως, τυχαία. Ένα τυχόν ΗΜ κύμα μπορεί να γραφεί –και να ιδωθεί– ως μια επαλληλία ταλαντωτών με όλες τις δυνατές συχνότητες. Βλέπουμε έτσι ότι η συνθήκη κβάντωσης Bohr-Sommerfeld εμπεριέχει τόσο τη συνθήκη του Planck όσο και τη συνθήκη του Bohr ως ειδικές της περιπτώσεις.

β) Ξεκινάμε από τη γνωστή συνθήκη δημιουργίας στάσιμων κυμάτων σε ένα διάστημα $L$

$$L=n\frac{\lambda}{2}=n\frac{h}{2p}, \tag{7}$$

μόνο που στην περίπτωσή μας –λόγω της παρουσίας του δυναμικού $V(x)$– η ορμή του σωματιδίου εξαρτάται από τη θέση του (είναι $p(x)=\sqrt{2m(E-V(x))}$) και είναι εύλογο να αντικατασταθεί από τη μέση της τιμή στο διάστημα $L$

$$\overline{p}=\frac{1}{L}\int_{x_1}^{x_2}p(x)\,dx,$$

οπότε η (7) θα γράφεται ως

$$L=n\,\frac{h}{2\overline{p}}\ \Rightarrow\ 2L\,\overline{p}=nh$$

$$\Rightarrow\ 2\cancel{L}\,\frac{1}{\cancel{L}}\int_{x_1}^{x_2}p(x)\,dx=nh$$

που είναι ακριβώς η συνθήκη που θέλαμε να αποδείξουμε.

Το γενικότερο συμπέρασμα είναι σαφές: Όλες οι επιμέρους παραδοχές και συνθήκες της λεγόμενης «παλιάς κβαντικής θεωρίας» φαίνεται να πηγάζουν από μια ενιαία φυσική αρχή: Την αρχή του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού.