Συμπληρωμα θεωριας Κεφαλαιου 3

Περαιτέρω μελέτη των ερμιτιανών τελεστών: Η έννοια του συζυγούς τελεστή

α) Δεδομένης της σημασίας των *ερμιτιανών τελεστών* για την εσωτερική συνέπεια της κβαντομηχανικής, είναι ίσως σκόπιμο για τον πιο απαιτητικό αναγνώστη να αποδείξει κάποιες χρήσιμες ιδιότητες αυτών των τελεστών όπως, παραδείγματος χάριν, τις:

1. Το άθροισμα δύο ερμιτιανών τελεστών είναι πάλι ένας ερμιτιανός τελεστής.
2. Το γινόμενο ενός τυχόντος πραγματικού αριθμού επί έναν ερμιτιανό τελεστή είναι πάλι ένας ερμιτιανός τελεστής.
3. Το γινόμενο δύο ερμιτιανών τελεστών είναι πάλι ένας ερμιτιανός τελεστής μόνο αν οι τελεστές μετατίθενται.

Δείξτε επίσης, ως άμεση συνέπεια όλων των παραπάνω, ότι και *η τυχούσα πραγματική συνάρτηση $F = F(A)$ ενός ερμιτιανού τελεστή A είναι πάλι ένας ερμιτιανός τελεστής*.

β) Εφαρμόστε τις προηγούμενες ιδιότητες για να αποδείξετε ότι τόσο η χαμιλτονιανή σε μία διάσταση

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

(και, βεβαίως, η τριδιάστατη μορφή της) καθώς και οι τρεις συνιστώσες της στροφορμής

$$\ell_x = yp_z - zp_y\,, \qquad \ell_y = zp_x - xp_z\,, \qquad \ell_z = xp_y - yp_x$$

είναι ερμιτιανοί τελεστές. Η ερμιτιανότητα των συνιστωσών της θέσης και των συνιστωσών της ορμής θεωρείται, βεβαίως, δεδομένη.

γ) Η φύση των ερμιτιανών τελεστών θα φωτιστεί ακόμα καλύτερα αν εισαγάγουμε την έννοια του *συζυγούς τελεστή* –σύμβολο $A^\dagger$– μέσω της σχέσης ορισμού

$$(\psi, A\phi) \underset{\text{ορ}}{=} (A^\dagger\psi, \phi) \tag{1}$$

που διατυπώνεται λεκτικά ως εξής: *συζυγής ενός τελεστή είναι ο τελεστής που προκύπτει κατά τη «μεταφορά» του αρχικού από το ένα διάνυσμα ενός τυχόντος εσωτερικού γινομένου στο άλλο*. Βάσει αυτής της νέας έννοιας ο ορισμός του ερμιτιανού τελεστή μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής: *ερμιτιανός είναι εκείνος ο τελεστής που ισούται με τον συζυγή του*. Δηλαδή

$$A^\dagger = A \quad (\textit{ερμιτιανοί τελεστές}).$$

Με βάση τον ορισμό (1) δείξτε τώρα τις ακόλουθες ιδιότητες του συζυγούς τελεστή:

1. $(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$: Ο συζυγής του αθροίσματος είναι το άθροισμα των συζυγών τελεστών.
2. $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$: Ο συζυγής του γινομένου είναι το γινόμενο των συζυγών με αντίστροφη σειρά.

Δείξτε κατόπιν ότι οι ιδιότητες των ερμιτιανών τελεστών του ερωτήματος (α) είναι άμεση απόρροια των παραπάνω.

Σημειώστε τώρα ότι αν θεωρήσουμε τους (μιγαδικούς εν γένει) αριθμούς ως μια τετριμμένη κατηγορία τελεστών –και έτσι πρέπει να τους θεωρούμε–, τότε γι' αυτούς η έννοια του συζυγούς τελεστή ταυτίζεται με την έννοια του συζυγούς μιγαδικού αριθμού. Δηλαδή για $A = \alpha =$μιγαδικός αριθμός θα είναι $A^\dagger = \alpha^*$. Αντιστρέφοντας τον συλλογισμό μπορούμε λοιπόν να δούμε την έννοια του συζυγούς τελεστή ως μια φυσιολογική γενίκευση της έννοιας του συζυγούς μιγαδικού αριθμού. Οπότε, βεβαίως, και η έννοια του ερμιτιανού τελεστή $(A^\dagger = A)$ θα πρέπει να θεωρηθεί και αυτή ως γενίκευση της έννοιας του πραγματικού αριθμού, αφού για $A = \alpha$ η σχέση ορισμός $A^\dagger = A$ καταλήγει στην $\alpha^* = \alpha$, η οποία ορίζει τους πραγματικούς αριθμούς ως υποσύνολο των μιγαδικών αριθμών.

Στο φως αυτών των παρατηρήσεων οι ιδιότητες που σας ζητήσαμε να δείξετε δεν είναι παρά οι αυτονόητες γενικεύσεις των αντίστοιχων ιδιοτήτων για αριθμούς. Αυτονόητες ακόμα και ως προς τις διαφορές που εμφανίζονται στα γινόμενα, όπου πρέπει να παίζει ρόλο η μεταθετικότητα ή μη των τελεστών, στην οποία και συμπυκνώνεται η μόνη αλγεβρική διαφορά τους από τους αριθμούς.

Λύση

α)
1. $\langle A+B\rangle = \langle A\rangle + \langle B\rangle =$ πραγματικός αριθμός $\Rightarrow A+B =$ ερμιτιανός
2. $\langle cA\rangle = c\langle A\rangle =$ πραγματικός $\Rightarrow cA =$ ερμιτιανός
3. Θα πρέπει να δείξουμε ότι

$$(\psi, AB\phi) = (AB\psi, \phi) \qquad \forall \psi, \phi.$$

Δεδομένου ότι οι A και B είναι ερμιτιανοί, θα έχουμε διαδοχικά

$$(\psi, AB\phi) \underbrace{=}_{\text{λόγω ερμιτιανότητας του } A} (A\psi, B\phi) \underbrace{=}_{\text{λόγω ερμιτιανότητας του } B} (BA\psi, \phi) \overset{\text{αφού } BA=AB}{=} (AB\psi, \phi) \quad \text{ό.έ.δ.}$$

▶ Αν ο A είναι ερμιτιανός τελεστής, το ίδιο θα ισχύει –σύμφωνα με την 3– και για το γινόμενο $A \cdot A = A^2$, όπως και για το $A^2 \cdot A = A^3$ κ.ο.κ. μέχρι την τυχούσα δύναμη A^n. Επομένως, θα είναι επίσης ερμιτιανός τελεστής και η δυναμοσειρά(*)

(*) που δεν είναι, βεβαίως, παρά το *ανάπτυγμα Taylor* της δοθείσας *πραγματικής* συνάρτησης $F(x)$, εξ ου και ο περιορισμός σε πραγματικά c_n.

$$F(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, A^n \qquad (c_n = \text{πραγματικός αριθμός})$$

αφού δεν είναι παρά ένα *άθροισμα* –άπειρο έστω– ερμιτιανών τελεστών.

β) Για τη χαμιλτονιανή αυτό είναι άμεση συνέπεια των παραπάνω, αφού ο p^2 –ως γινόμενο $p \cdot p$– είναι σίγουρα ερμιτιανός τελεστής, όπως επίσης και ο $V(x)$, ως (πραγματική) συνάρτηση του ερμιτιανού τελεστή $A = x$. Για τη στροφορμή, η ερμιτιανότητα των συνιστωσών της απορρέει επίσης από τις προηγούμενες ιδιότητες 1 και 3, αν παρατηρήσετε ότι όλα τα γινόμενα θέσης-ορμής που περιέχει –π.χ. yp_z, zp_y, zp_x κ.λπ.– είναι μεταξύ μη ομόλογων συνιστωσών τους οι οποίες μετατίθενται, όπως δείξαμε στο κείμενο.

γ) 1. Θα είναι διαδοχικά

$$\big(\psi, (A+B)\phi\big) \overset{\substack{\text{λόγω γενικών ιδιοτήτων του} \\ \text{εσωτερικού γινομένου}}}{=} (\psi, A\phi) + (\psi, B\phi) \overset{\substack{\text{από τον ορισμό} \\ \text{του συζυγούς}}}{=} (A^\dagger\psi, \phi) + (B^\dagger\psi, \phi)$$

$$= \big((A^\dagger + B^\dagger)\psi, \phi\big) \;\Rightarrow\; (A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger \quad \text{ό.έ.δ.}$$

2. $(\psi, AB\phi) = (A^\dagger\psi, B\phi) = (B^\dagger A^\dagger\psi, \phi) \;\Rightarrow\; (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ ό.έ.δ.