Συμπληρωμα θεωριας Κεφαλαιου 4

1. Τεχνικές υπολογισμού μεταθετών

α) Μια συστηματικότερη μέθοδος υπολογισμού μεταθετών, την οποία θα αναπτύξουμε εκτενέστερα στον δεύτερο τόμο του βιβλίου, εκκινεί από την ταυτότητα

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C] \tag{1}$$

που δεν είναι παρά ειδική περίπτωση της ταυτότητας

$$[A, A_1 \dots A_i \dots A_n] = \sum_{i=1}^{n} A_1 \dots A_{i-1}[A, A_i]A_{i+1} \dots A_n \tag{2}$$

η οποία μας λέει το εξής πολύ απλό: ότι ο μεταθέτης ενός τελεστή A με ένα γινόμενο τελεστών $A_1 \dots A_i \dots A_n$ προκύπτει παίρνοντας τον μεταθέτη τού A με κάθε έναν τελεστή A_i ($i = 1, \dots, n$) του γινομένου και τοποθετώντας τους υπόλοιπους τελεστές δεξιά ή αριστερά του μεταθέτη $[A, A_i]$, ανάλογα με τη σχετική τους θέση ως προς τον τελεστή A_i. Όσοι βρίσκονται αριστερά του A_i τοποθετούνται στα αριστερά του μεταθέτη $[A, A_i]$ και όσοι βρίσκονται δεξιά, δεξιά. *Αποδείξτε* την ταυτότητα (1) και *εφαρμόστε* τη γενικότερη μορφή της (2) για να αναπτύξετε τους ακόλουθους *σύνθετους μεταθέτες* σε *απλούς*

$$\text{α) } [A, B^2], \qquad \text{β) } [A, BCD], \qquad \text{γ) } [A, B^2C].$$

Αποδείξτε κατόπιν ότι τα αναπτύγματα που βρήκατε είναι σωστά. Ότι δηλαδή τα δύο μέλη είναι εκ ταυτότητος ίσα. Μπορείτε να εφαρμόσετε την παραπάνω τεχνική για τον μεταθέτη $[AB, CD]$ του οποίου και οι δύο τελεστές είναι γινόμενα;

β) Θεωρώντας γνωστές τις μεταθετικές σχέσεις της στροφορμής $[\ell_x, \ell_y] = i\hbar\ell_z +$ κυκλικές μεταθέσεις, χρησιμοποιήστε την «τεχνολογία» του προηγούμενου ερωτήματος για να αποδείξετε την επίσης θεμελιώδη μεταθετική σχέση

$$[\ell_i\,, \boldsymbol{\ell}^2] = 0 \qquad (i = x, y, z).$$

γ) Με αφετηρία τώρα τη μεταθετική σχέση $[x, p] = i\hbar$ (1-D) και κάνοντας χρήση της ίδιας όπως πριν τεχνικής αποδείξτε και τις σχέσεις

$$[x, p^2] = 2i\hbar p, \qquad [x, p^3] = 3i\hbar p^2, \dots \qquad [x, p^n] = in\hbar p^{n-1}$$

από τις οποίες προκύπτει εύκολα και η γενικότερη μεταθετική σχέση

$$\big[x, A(x, p)\big] = i\hbar\, \frac{\partial A}{\partial p} \tag{3}$$

καθώς επίσης και η

$$\big[p, A(x,p)\big] = -i\hbar\, \frac{\partial A}{\partial x}, \tag{4}$$

όπου $A(x,p)$ μια τυχούσα συνάρτηση των μεγεθών x και p που απλώς είναι αρκετά ομαλή ώστε να μπορεί να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά Taylor ως προς x ή ως προς p. Ποια είναι η γενίκευση των (3), (4) στις τρεις διαστάσεις;

Εφαρμόστε τις (3) και (4) –ή την τριδιάστατη γενίκευσή τους– για να υπολογίσετε τους μεταθέτες

α) $[x, H]$, $[p, H]$ (1-D),

β) $[x, \ell_x]$, $[x, \ell_y]$, $[p_x, \ell_x]$, $[p_x, \ell_y]$ (3-D).

Λύση

α) Θα πρέπει να δείξουμε ότι

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]. \tag{5}$$

Με βάση τον ορισμό του μεταθέτη, $[A, B] = AB - BA$, τα δύο μέλη της (5) γράφονται ως

$$\begin{aligned} ABC - BCA &\underset{;}{=} (AB - BA)C + B(AC - CA) \\ &= ABC - \cancel{BAC} + \cancel{BAC} - BCA \end{aligned}$$

και η ισότητα πράγματι ισχύει.

i) $[A, B^2] \equiv [A, BB] = [A, B]B + B[A, B]$

ii) $[A, BCD] = [A, B]CD + B[A, C]D + BC[A, D]$

iii) $[A, B^2C] \equiv [A, BBC] = [A, B]BC + B[A, B]C + B^2[A, C]$

Έλεγχος της (i):

1ο μέλος $= AB^2 - B^2A$

2ο μέλος $= (AB - BA)B + B(AB - BA) = AB^2 - \cancel{BAB} + \cancel{BAB} - B^2A =$ 1ο μέλος και παρόμοια για τα άλλα αναπτύγματα.

Τα προηγούμενα ισχύουν, βεβαίως, και στην περίπτωση που το γινόμενο είναι στον πρώτο όρο του μεταθέτη, αφού μπορεί πάντα να μεταφερθεί στον δεύτερο με χρήση της ιδιότητας $[A, B] = -[B, A]$. Και ο πρακτικός κανόνας είναι ακριβώς ο ίδιος: Παραδείγματος χάριν

$$[AB, C] = [A, C]B + A[B, C]$$

ή, ακόμα

$$[ABC, D] = [A, D]BC + A[B, D]C + AB[C, D].$$

Όσον αφορά την περίπτωση που και οι δύο όροι του μεταθέτη είναι γινόμενα, αυτή ανάγεται στα προηγούμενα θεωρώντας αρχικά το πρώτο γινόμενο ως *έναν τελεστή* και εφαρμόζοντας μετά και γι' αυτόν την ίδια τεχνική. Παραδείγματος χάριν,

$$
\begin{aligned}
[AB, CD] &= [AB, C]D + C\,[AB, D] \\
&= \big(A[B,C] + [A,C]B\big)D + C\big([A,D]B + A[B,D]\big) \\
&= A[B,C]D + [A,C]BD + C[A,D]B + CA[B,D]
\end{aligned}
$$

και εναπόκειται σε σας να ελέγξετε ότι αυτό το ανάπτυγμα είναι πράγματι σωστό.

β) Θα είναι διαδοχικά:

$$
\begin{aligned}
[\ell_x, \boldsymbol{\ell}^2] = [\ell_x, \ell_x^2 + \ell_y^2 + \ell_z^2] &= \underbrace{[\ell_x, \ell_x^2]}_{0} + [\ell_x, \ell_y^2] + [\ell_x, \ell_z^2] \\
&= [\ell_x, \ell_y\ell_y] + [\ell_x, \ell_z\ell_z] \\
&= [\ell_x, \ell_y]\ell_y + \ell_y[\ell_x, \ell_y] + [\ell_x, \ell_z]\ell_z + \ell_z[\ell_x, \ell_z] \\
&= i\hbar\ell_z\ell_y + i\hbar\ell_y\ell_z + (-i\hbar\ell_y)\ell_z + \ell_z(-i\hbar\ell_y) \\
&= i\hbar(\ell_z\ell_y + \ell_y\ell_z - \ell_y\ell_z - \ell_z\ell_y) = 0
\end{aligned}
$$

και παρόμοια για τους άλλους μεταθέτες $[\ell_y, \boldsymbol{\ell}^2]$ και $[\ell_z, \boldsymbol{\ell}^2]$.

γ) Θα είναι

- $[x, p^2] \equiv [x, pp] = [x, p]p + p[x, p] = (i\hbar)p + p(i\hbar) = 2i\hbar p$ ό.έ.δ.
- $[x, p^3] \equiv [x, p^2 \cdot p] = [x, p^2]p + p^2[x, p] = (2i\hbar p)p + p^2(i\hbar) = 3i\hbar p^2$ ό.έ.δ.

και επαγωγικά

- $[x, p^n] = i\hbar n p^{n-1}$.

Για μια τυχούσα συνάρτηση $A(x,p)$ που αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά ως προς p

$$
A(x,p) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x) p^n,
$$

θα είναι

$$
\begin{aligned}
\big[x, A(x,p)\big] = \left[x, \sum_n c_n(x)p^n\right] &= \sum_n \big[x, c_n(x)p^n\big] \\
&= \sum_n c_n(x)[x, p^n] = \sum_n c_n(x) i\hbar n p^{n-1} = i\hbar \sum_n c_n(x)(np^{n-1}) \\
&= i\hbar\,\frac{\partial}{\partial p}\sum_n c_n(x)p^n = i\hbar\,\frac{\partial}{\partial p}\,A(x,p) \qquad \text{ό.έ.δ.}
\end{aligned}
$$

και εντελώς ανάλογα

$$
\big[p, A(x,p)\big] = -i\hbar\,\frac{\partial A}{\partial x}
$$

με αντίστοιχες (προφανείς) γενικεύσεις στις τρεις διαστάσεις, τις

$$[x_i, A] = i\hbar\,\frac{\partial A}{\partial p_i}, \qquad [p_i, A] = -i\hbar\,\frac{\partial A}{\partial x_i}$$

που έχουν, βέβαια, ως αφετηρία τους τις θεμελιώδεις μεταθετικές σχέσεις θέσης-ορμής

$$[x_i, p_j] = i\hbar\,\delta_{ij}$$

ενώ οι συνιστώσες καθενός από τα δύο διανύσματα (*θέση* και *ορμή*) μετατίθενται. Δηλαδή

$$[x_i, x_j] = 0, \qquad [p_i, p_j] = 0.$$

Ως εφαρμογή των παραπάνω θα υπολογίσουμε τους μεταθέτες:

i) $[x, H]$, $[p, H]$ (1-D)

- $[x, H] = i\hbar\,\dfrac{\partial H}{\partial p} = i\hbar\,\dfrac{\partial}{\partial p}\left(\dfrac{p^2}{2m} + V(x)\right) = i\hbar\,\dfrac{p}{m} = i\hbar v$

  όπου $v = p/m$ ο τελεστής της ταχύτητας

- $[p, H] = -i\hbar\,\dfrac{\partial H}{\partial x} = -i\hbar\,\dfrac{dV}{dx} = i\hbar\,F(x)$

ii) $[x, \ell_x]$, $[x, \ell_y]$, $[p_x, \ell_x]$, $[p_x, \ell_y]$, (3-D)

- $[x, \ell_x] = [x, yp_z - zp_y] = [x, yp_z] - [x, zp_y] = 0$ (διότι ο x μετατίθεται με κάθε όρο του κάθε γινομένου χωριστά)

  Επίσης:

  $$[x, \ell_x] = i\hbar\,\frac{\partial \ell_x}{\partial p_x} = i\hbar\,\frac{\partial}{\partial p_x}\,(yp_z - zp_y) = 0$$

- $[x, \ell_y] = [x, zp_x - xp_z] = [x, zp_x] - [x, xp_z] = z[x, p_x] - 0 = i\hbar z$

ή

$$[x, \ell_y] = i\hbar\,\frac{\partial \ell_y}{\partial p_x} = i\hbar\,\frac{\partial}{\partial p_x}\,(zp_x - xp_z) = i\hbar z$$

- $[p_x, \ell_x] = -i\hbar\,\dfrac{\partial \ell_x}{\partial x} = -i\hbar\,\dfrac{\partial}{\partial x}\,(yp_z - zp_y) = 0$

- $[p_x, \ell_y] = -i\hbar\,\dfrac{\partial \ell_y}{\partial x} = -i\hbar\,\dfrac{\partial}{\partial x}\,(zp_x - xp_z) = i\hbar p_z.$