Κεφάλαιο 0

Χρήσιμα στοιχεία σχετικά με τα σύνολα

Υποθέτουμε ότι ο αναγνώστης είναι ήδη κάπως εξοικειωμένος με τον συνηθισμένο καθημερινό συνολοθεωρητικό εξοπλισμό. Παρ' όλα αυτά, θα παρουσιάσουμε συνοπτικά κάποια στοιχεία συνολοθεωρίας που θα μας χρειαστούν· αν μη τι άλλο, με τον τρόπο αυτό θα εμπεδώσουμε τον σχετικό συμβολισμό. Συνιστούμε στον αναγνώστη, αντί να μελετήσει εξαντλητικά αυτό το κεφάλαιο εξαρχής, απλώς να ανατρέχει σε αυτό αν και όταν ανακύψουν ζητήματα συνολοθεωρητικής φύσης στα επόμενα κεφάλαια. Το αγαπημένο βιβλίο συνολοθεωρίας του συγγραφέα είναι φυσικά το *Elements of Set Theory* του ιδίου (βλ. τη βιβλιογραφία στο τέλος του βιβλίου).

Κατ' αρχάς, δύο λόγια για την τεχνική «αργκό». Σε όλο το βιβλίο θα χρησιμοποιήσουμε διάφορες καθιερωμένες μαθηματικές συντομογραφίες. Το σύμβολο «$\dashv$» δηλώνει το τέλος μιας απόδειξης. Μια φράση του τύπου «Αν $\ldots$, τότε $\ldots$» θα γράφεται μερικές φορές στη συνοπτική μορφή «$\ldots \Rightarrow \ldots$». Επίσης, για την αντίστροφη συνεπαγωγή έχουμε το σύμβολο «$\Leftarrow$». Για τη φράση «αν και μόνο αν» χρησιμοποιούμε τη σύντμηση «ανν» (η οποία έχει πλέον καθιερωθεί στη μαθηματική γλώσσα) και το σύμβολο «$\Leftrightarrow$». Για τη λέξη «επομένως», χρησιμοποιούμε το σύμβολο «$\therefore$».

Ο συμβολιστικός «μηχανισμός» μέσω του οποίου η έκφραση «$x \neq y$» νοείται ως άρνηση της «$x = y$» και η «$x \notin y$» ως άρνηση της «$x \in y$» θα επεκταθεί και σε άλλες περιπτώσεις. Για παράδειγμα, στην Ενότητα 1.2 ορίζουμε την έκφραση «$\Sigma \models \tau$», οπότε η «$\Sigma \not\models \tau$» είναι η άρνησή της.

Συνεχίζουμε: ένα *σύνολο* είναι μια συλλογή από αντικειμένα, τα οποία ονομάζονται μέλη ή στοιχεία του συνόλου. Ως συνήθως, η έκφραση «$t \in A$» σημαίνει ότι το t είναι μέλος του A, και η έκφραση «$t \notin A$» ότι το t δεν είναι μέλος του A. Η έκφραση «$x = y$» σημαίνει ότι τα x και y είναι το ίδιο αντικείμενο. Δηλαδή, η παράσταση «x» στα αριστερά του συμβόλου της ισότητας είναι ένα όνομα για το ίδιο αντικείμενο που ονοματίζει και η άλλη παράσταση, η «y». Αν $A = B$, τότε για οποιοδήποτε αντικείμενο t ισχύει αυτομάτως ότι $t \in A$ ανν $t \in B$, για τον απλό λόγο ότι τα A και B είναι το ίδιο αντικείμενο. Το αντίστροφο είναι η αρχή της εκτατικότητας: Εάν τα A και B είναι σύνολα τέτοια ώστε για κάθε αντικείμενο t να ισχύει ότι

$$t \in A \quad \text{ανν} \quad t \in B,$$

τότε $A = B$. Η αρχή αυτή αντανακλά και το τι *είναι* ένα σύνολο· ένα σύνολο καθορίζεται μόνο από τα μέλη του.

Μια χρήσιμη πράξη είναι η προσάρτηση ενός επιπλέον αντικειμένου σε ένα σύνολο. Για ένα σύνολο A, έστω $A; t$ το σύνολο του οποίου τα μέλη είναι (i) τα μέλη του A, συν (ii) το (πιθανώς νέο) μέλος t. Το t μπορεί να ανήκει η να μην ανήκει ήδη στο A και, χρησιμοποιώντας συμβολισμό που θα οριστεί παρακάτω, έχουμε ότι

$$A; t = A \cup \{t\}$$

και

$$t \in A \quad \text{ανν} \quad A; t = A.$$

Ένα ειδικό σύνολο είναι το κενό σύνολο, $\varnothing$, το οποίο δεν έχει απολύτως κανένα μέλος. Οποιοδήποτε άλλο σύνολο χαρακτηρίζεται *μη κενό*. Για οποιοδήποτε αντικείμενο x υπάρχει το μονομελές σύνολο $\{x\}$ το οποίο έχει ως μοναδικό μέλος το x. Γενικότερα, για οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος αντικειμένων, $x_1, \ldots, x_n$, υπάρχει το σύνολο $\{x_1, \ldots, x_n\}$, το οποίο έχει ως μέλη ακριβώς αυτά τα αντικείμενα. Να σημειωθεί ότι $\{x, y\} = \{y, x\}$, αφού τα δύο αυτά σύνολα έχουν ακριβώς τα ίδια μέλη. Απλώς χρησιμοποιήσαμε διαφορετικές εκφράσεις για να περιγράψουμε το σύνολο. Εάν η διάταξη των στοιχείων έχει σημασία, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διατεταγμένα ζεύγη (τα οποία εξετάζονται παρακάτω).

Θα προεκτείνουμε τον συμβολισμό αυτό για να καλύψουμε και ορισμένες άπειρες περιπτώσεις. Για παράδειγμα, $\{0, 1, 2, \ldots\}$ είναι το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών, και $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ είναι το σύνολο $\mathbb{Z}$ όλων των ακεραίων.

Μια έκφραση του τύπου «$\{x \mid \_x\_\}$» δηλώνει το σύνολο όλων των αντικειμένων x για τα οποία ισχύει ότι $\_x\_$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό αυτό με αρκετή ελευθερία. Παραδείγματος χάριν, $\{\langle m, n\rangle \mid m < n \text{ ανήκουν στο } \mathbb{N}\}$ είναι το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών φυσικών αριθμών στα οποία η πρώτη συνιστώσα είναι μικρότερη από τη δεύτερη, ενώ $\{x \in A \mid \_x\_\}$ είναι το σύνολο όλων των μελών x του A για τα οποία ισχύει ότι $\_x\_$.

Εάν το A είναι ένα σύνολο του οποίου όλα τα μέλη είναι επίσης μέλη του B, τότε το A είναι υποσύνολο του B, γεγονός που συμβολίζεται «$A \subseteq B$». Σημειωτέον ότι οποιοδήποτε σύνολο είναι υποσύνολο του εαυτού του. Επίσης, το $\varnothing$ είναι υποσύνολο κάθε συνόλου. (Η έκφραση «$\varnothing \subseteq A$» είναι «αληθής εν κενώ», αφού για να επαληθεύσουμε, για κάθε μέλος του $\varnothing$, ότι ανήκει επίσης στο A δεν χρειάζεται να κάνουμε απολύτως τίποτα. Ή, από μια άλλη οπτική γωνία, η έκφραση «$A \subseteq B$» μπορεί να είναι ψευδής μόνο αν κάποιο μέλος του A δεν ανήκει στο B. Εάν όμως $A = \varnothing$, αυτό είναι αδύνατο.) Από το σύνολο A μπορούμε να σχηματίσουμε ένα νέο σύνολο, το *δυναμοσύνολο* $\mathcal{P}A$ του A, το οποίο έχει ως μέλη τα υποσύνολα του A. Δηλαδή,

$$\mathcal{P}A = \{x \mid x \subseteq A\}.$$

Παραδείγματος χάριν,

$$\mathcal{P}\varnothing = \{\varnothing\},$$
$$\mathcal{P}\{\varnothing\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}.$$

Η *ένωση* των A και B, $A \cup B$, είναι το σύνολο όλων των αντικειμένων που είναι μέλη του A ή του B (ή και των δύο). Παραδείγματος χάριν, $A; t = A \cup \{t\}$. Αντίστοιχα, η *τομή* των A και B, $A \cap B$, είναι το σύνολο όλων των αντικειμένων που είναι μέλη αμφότερων των A και B. Τα σύνολα A και B είναι *ξένα* ανν η τομή τους είναι κενή (δηλ. αν δεν έχουν κανένα κοινό μέλος). Περισσότερα από δύο σύνολα χαρακτηρίζονται *ανά δύο ξένα* ανν για κάθε ζεύγος από αυτά ισχύει ότι τα μέλη του ζεύγους είναι ξένα μεταξύ τους.

Γενικότερα, έστω ένα σύνολο A του οποίου τα μέλη είναι σύνολα και τα ίδια. Η ένωση, $\bigcup A$, του A είναι το σύνολο που προκύπτει αν εντάξουμε όλα τα μέλη του A σε ένα ενιαίο σύνολο:

$$\bigcup A = \{x \mid \text{το } x \text{ ανήκει σε κάποιο μέλος του } A\}.$$

Αντίστοιχα, για οποιοδήποτε μη κενό τέτοιο σύνολο A,

$$\bigcap A = \{x \mid \text{το } x \text{ ανήκει σε όλα τα μέλη του } A\}.$$

Παραδείγματος χάριν, αν

$$A = \{\{0,1,5\}, \{1,6\}, \{1,5\}\},$$

τότε

$$\bigcup A = \{0,1,5,6\},$$

$$\bigcap A = \{1\}.$$

Δύο άλλα παραδείγματα είναι τα εξής:

$$A \cup B = \bigcup\{A, B\},$$

$$\bigcup \mathcal{P}A = A.$$

Στις περιπτώσεις όπου έχουμε ένα σύνολο A_n για κάθε φυσικό αριθμό n, η ένωση όλων αυτών των συνόλων, $\bigcup\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, συμβολίζεται συνήθως «$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$», ή απλώς «$\bigcup_n A_n$».

Το διατεταγμένο ζεύγος $\langle x, y\rangle$ των αντικειμένων x και y θα πρέπει να οριστεί έτσι ώστε

$$\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle \qquad \text{ανν} \qquad x = u \quad \text{και} \quad y = v.$$

Οποιοσδήποτε ορισμός που έχει αυτή την ιδιότητα είναι έγκυρος· ο καθιερωμένος είναι ο εξής:

$$\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Για διατεταγμένες τριάδες, ορίζουμε

$$\langle x, y, z\rangle = \langle\langle x, y\rangle, z\rangle.$$

Γενικότερα, ορίζουμε τις διάφορες n-άδες αναδρομικά ως εξής:

$$\langle x_1, \ldots, x_{n+1}\rangle = \langle\langle x_1, \ldots, x_n\rangle, x_{n+1}\rangle$$

για $n > 1$. Μας διευκολύνει να ορίσουμε επίσης $\langle x\rangle = x$· στην περίπτωση αυτή, η παραπάνω ισότητα ισχύει και για $n = 1$. Η S είναι *πεπερασμένη ακολουθία* (ή αλλιώς *συμβολοσειρά*) μελών του A ανν υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος ώστε $S = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, όπου κάθε $x_i \in A$. (Ως πεπερασμένες ακολουθίες ορίζονται συχνά κάποιες πεπερασμένες συναρτήσεις, αλλά ο παραπάνω ορισμός είναι κάπως πιο εύχρηστος για εμάς.)

Τμήμα της πεπερασμένης ακολουθίας $S = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ είναι μια πεπερασμένη ακολουθία

$$\langle x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{m-1}, x_m\rangle, \qquad \text{όπου} \quad 1 \leq k \leq m \leq n.$$

Το τμήμα αυτό είναι *αρχικό* ανν $k = 1$ και *γνήσιο* ανν είναι διαφορετικό από την S.

Αν $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \langle y_1, \ldots, y_n\rangle$, τότε, όπως κανείς να αντιληφθεί εύκολα, $x_i = y_i$ για $1 \leq i \leq n$. (Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή ως προς n και με χρήση της βασικής ιδιότητας των διατεταγμένων ζευγών.) Αν όμως $\langle x_1, \ldots, x_m\rangle = \langle y_1, \ldots, y_n\rangle$, τότε δεν έπεται εν γένει ότι $m = n$. Σε τελική ανάλυση, κάθε διατεταγμένη τριάδα είναι επίσης διατεταγμένο ζεύγος. Θα δείξουμε όμως ότι τα m και n μπορούν να είναι άνισα μόνο αν κάποιο x_i είναι το ίδιο πεπερασμένη ακολουθία από y_j, ή αντιστρόφως:

Λημμα 0Α Αν $\langle x_1, \ldots, x_m\rangle = \langle y_1, \ldots, y_m, \ldots, y_{m+k}\rangle$, τότε $x_1 = \langle y_1, \ldots, y_{k+1}\rangle$.

Απoδειξη. Χρησιμοποιούμε επαγωγή ως προς m. Εάν $m = 1$, το συμπέρασμα έπεται αμέσως. Όσον αφορά το επαγωγικό βήμα, έστω ότι $\langle x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}\rangle = \langle y_1, \ldots, y_{m+k}, y_{m+1+k}\rangle$. Οι πρώτες συνιστώσες αυτών των διατεταγμένων ζευγών όμως θα πρέπει να είναι ίσες: $\langle x_1, \ldots, x_m\rangle = \langle y_1, \ldots, y_{m+k}\rangle$. Κατόπιν, εφαρμόζουμε την επαγωγική υπόθεση. $\dashv$

Παραδείγματος χάριν, έστω ότι το A είναι ένα σύνολο τέτοιο ώστε κανένα μέλος του A δεν είναι πεπερασμένη ακολουθία άλλων μελών. Στην περίπτωση αυτή, αν $\langle x_1, \ldots, x_m \rangle = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle$ και κάθε x_i και y_j ανήκει στο A, τότε σύμφωνα με το παραπάνω λήμμα $m = n$. Κατά συνέπεια έχουμε επίσης ότι $x_i = y_i$.

Από τα σύνολα A και B μπορούμε να σχηματίσουμε το *καρτεσιανό γινόμενό* τους, δηλαδή το σύνολο $A \times B$ όλων των ζευγών $\langle x, y \rangle$ για τα οποία $x \in A$ και $y \in B$. Το A^n είναι το σύνολο όλων των n-άδων από μέλη του A. Παραδείγματος χάριν, $A^3 = (A \times A) \times A$.

Μια *σχέση* R είναι ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών. Παραδείγματος χάριν, η σχέση διάταξης πάνω στους αριθμούς 0–3 εκφράζεται από –και στην πραγματικότητα *είναι*– το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών

$$\{\langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 0,3\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle\}.$$

Το *πεδίο ορισμού* της R (το οποίο συμβολίζεται $\operatorname{dom} R$) είναι το σύνολο όλων των αντικειμένων x για τα οποία ισχύει ότι $\langle x, y \rangle \in R$ για κάποιο y. Το *πεδίο τιμών* της R (το οποίο συμβολίζεται $\operatorname{ran} R$) είναι το σύνολο όλων των αντικειμένων y για τα οποία ισχύει ότι $\langle x, y \rangle \in R$ για κάποιο x. Η ένωση των $\operatorname{dom} R$ και $\operatorname{ran} R$ είναι το *σώμα* (ή αλλιώς *πεδίο*) της R, $\operatorname{fld} R$.

Μια *n-μελής σχέση* πάνω στο A είναι ένα υποσύνολο του A^n. Αν $n > 1$, είναι σχέση. Μια 1-μελής (μονομελής) σχέση πάνω στο A, όμως, είναι απλώς ένα υποσύνολο του A. Μια ιδιαίτερα απλή διμελής σχέση πάνω στο A είναι η σχέση της ισότητας $\{\langle x, x \rangle \mid x \in A\}$ πάνω στο A. Αν R είναι μια n-μελής σχέση πάνω στο A και B είναι ένα υποσύνολο του A, ο *περιορισμός* της R στο B είναι η τομή $R \cap B^n$. Παραδείγματος χάριν, η σχέση που παραθέσαμε παραπάνω είναι ο περιορισμός στο σύνολο $B = \{0, 1, 2, 3\}$ της σχέσης διάταξης πάνω στο $\mathbb{N}$.

Μια *συνάρτηση* είναι μια σχέση F που έχει την ιδιότητα να είναι *μονότιμη*: Για κάθε x στο $\operatorname{dom} F$ υπάρχει μόνο ένα y τέτοιο ώστε $\langle x, y \rangle \in F$. Ως συνήθως, λέμε ότι το μοναδικό αυτό y είναι η τιμή $F(x)$ που παίρνει η F στο x. (Ο συμβολισμός αυτός ανάγεται στον Euler. Είναι κρίμα που ο Euler δεν επέλεξε αντ' αυτού την έκφραση $(x)F$· μια τέτοια επιλογή θα ήταν χρήσιμη για τη *σύνθεση* συναρτήσεων: η $f \circ g$ είναι η συνάρτηση της οποίας η τιμή στο x είναι η $f(g(x))$, δηλαδή η τιμή που προκύπτει αν εφαρμόσουμε πρώτα την g και μετά την f.)

Λέμε ότι η F *απεικονίζει* το A στο B. Αυτό εκφράζεται συνοπτικά στη μορφή

$$F : A \to B$$

που σημαίνει ότι η F είναι μια συνάρτηση, $\operatorname{dom} F = A$, και $\operatorname{ran} F \subseteq B$. Εάν επιπλέον $\operatorname{ran} F = B$, τότε η F απεικονίζει το A *επί* του B. Η F είναι *ένα προς ένα* ανν για κάθε y στο $\operatorname{ran} F$ υπάρχει μόνο ένα x τέτοιο ώστε $\langle x, y \rangle \in F$. Εάν το ζεύγος $\langle x, y \rangle$ ανήκει στο $\operatorname{dom} F$, τότε θέτουμε $F(x, y) = F(\langle x, y \rangle)$. Ο συμβολισμός αυτός επεκτείνεται και σε n-άδες· $F(x_1, \ldots, x_n) = F(\langle x_1, \ldots, x_n \rangle)$.

Μια *n-μελής πράξη* πάνω στο A είναι μια συνάρτηση που απεικονίζει το A^n στο A. Παραδείγματος χάριν, η πρόσθεση είναι μια διμελής πράξη πάνω στο $\mathbb{N}$, ενώ η πράξη της «διαδοχής» S (όπου $S(n) = n + 1$) είναι μια μονομελής πράξη πάνω στο $\mathbb{N}$. Εάν η f είναι μια n-μελής πράξη πάνω στο A, τότε ο *περιορισμός* της f σε ένα υποσύνολο B του A είναι η συνάρτηση g με πεδίο ορισμού B^n η οποία συμπίπτει με την f σε κάθε σημείο του B^n. Δηλαδή,

$$g = f \cap (B^n \times A).$$

Αυτή η συνάρτηση g θα είναι n-μελής πράξη πάνω στο B ανν το B είναι *κλειστό* ως προς την f, με την έννοια ότι $f(b_1, \ldots, b_n) \in B$ όταν καθένα από τα b_i ανήκει στο B. Σε αυτήν την περίπτωση, $g = f \cap B^{n+1}$, σε συμφωνία με τον ορισμό που δώσαμε για τον περιορισμό μιας σχέσης. Παραδείγματος χάριν, η πράξη της πρόσθεσης πάνω στο $\mathbb{N}$, η οποία περιέχει τριάδες όπως η $\langle\langle 3, 2\rangle, 5\rangle$, είναι ο περιορισμός στο $\mathbb{N}$ της πράξης της πρόσθεσης πάνω στο $\mathbb{R}$, η οποία περιέχει πολύ περισσότερες τριάδες.

Μια ιδιαίτερα απλή μονομελής πράξη πάνω στο A είναι η *ταυτοτική* συνάρτηση Id πάνω στο A, η οποία περιγράφεται από την ισότητα

$$Id(x) = x \qquad \text{για} \quad x \in A.$$

Δηλαδή, $Id = \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\}$.

Για μια σχέση R, ορίζουμε τα ακόλουθα:

Η R είναι *ανακλαστική* πάνω στο A ανν $\langle x, x\rangle \in R$ για κάθε x στο A.

Η R είναι *συμμετρική* ανν για κάθε $\langle x, y\rangle \in R$, έχουμε επίσης $\langle y, x\rangle \in R$.

Η R είναι *μεταβατική* ανν οποτεδήποτε ισχύει ότι $\langle x, y\rangle \in R$ και $\langle y, z\rangle \in R$ (εφόσον υπάρχουν τέτοιες περιπτώσεις), έχουμε επίσης ότι $\langle x, z\rangle \in R$.

Η R ικανοποιεί την *τριχοτομική ιδιότητα* πάνω στο A ανν για κάθε x και y που ανήκουν στο A, ισχύει ένα και μόνο ένα από τα εξής τρία ενδεχόμενα: $\langle x, y\rangle \in R$, $x = y$, ή $\langle y, x\rangle \in R$.

Η R είναι *σχέση ισοδυναμίας* πάνω στο A ανν αποτελεί διμελή σχέση πάνω στο A η οποία είναι ανακλαστική πάνω στο A, συμμετρική και μεταβατική.

Η R είναι *σχέση διάταξης* πάνω στο A ανν είναι μεταβατική και ικανοποιεί την τριχοτομική ιδιότητα πάνω στο A.

Για μια σχέση ισοδυναμίας R πάνω στο A και για $x \in A$, ορίζουμε ως *κλάση ισοδυναμίας* $[x]$ του x το σύνολο $\{y \mid \langle x, y\rangle \in R\}$. Οι κλάσεις ισοδυναμίας *διαμερίζουν* το A. Δηλαδή, οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι υποσύνολα του A τέτοια ώστε κάθε μέλος του A να ανήκει σε μία και μόνο μία κλάση ισοδυναμίας. Για οποιαδήποτε μέλη x και y του A,

$$[x] = [y] \quad \text{ανν} \quad \langle x, y\rangle \in R.$$

Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών είναι το σύνολο $\{0, 1, 2, \ldots\}$. (Οι φυσικοί αριθμοί μπορούν επίσης να οριστούν συνολοθεωρητικά· το ζήτημα αυτό ανακύπτει, χωρίς να αναπτύσσεται εκτενώς, στην Ενότητα 3.7.) Ένα σύνολο A είναι *πεπερασμένο* ανν υπάρχει ένα προς ένα συνάρτηση f η οποία απεικονίζει το A επί του $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, όπου n κάποιος φυσικός αριθμός. (Μπορούμε να θεωρούμε ότι η f «αριθμεί» τα μέλη του A.)

Ένα σύνολο A είναι *αριθμήσιμο* ανν υπάρχει συνάρτηση που να απεικονίζει ένα προς ένα το A στο $\mathbb{N}$. Παραδείγματος χάριν, οποιοδήποτε πεπερασμένο σύνολο είναι προφανώς αριθμήσιμο. Αν έχουμε τώρα ένα άπειρο αριθμήσιμο σύνολο A, τότε από τη δεδομένη συνάρτηση f που απεικονίζει το A ένα προς ένα στο $\mathbb{N}$, μπορούμε να εξαγάγουμε μια συνάρτηση f' η οποία απεικονίζει ένα προς ένα το A *επί* του $\mathbb{N}$. Για κάποιο $a_0 \in A$, όπου $f(a_0)$ είναι το μικρότερο μέλος του $\operatorname{ran} f$, έστω $f'(a_0) = 0$. Εν γένει, υπάρχει μοναδικό $a_n \in A$ τέτοιο ώστε το $f(a_n)$ να είναι το $(n+1)$-οστό μέλος του $\operatorname{ran} f$· έστω $f'(a_n) = n$. Σημειωτέον ότι $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$. (Μπορούμε επίσης να θεωρούμε ότι η f' «αριθμεί» τα μέλη του A, μόνο που τώρα η διαδικασία αρίθμησης είναι ατέρμονη.)

Θεωρημα 0B Αν A είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο, τότε το σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών από μέλη του A είναι επίσης αριθμήσιμο.

Αποδειξη. Το σύνολο S όλων αυτών των πεπερασμένων ακολουθιών μπορεί να εκφραστεί ως εξής

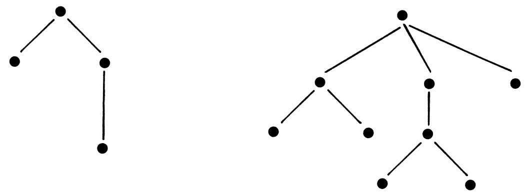
$$S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^{n+1}.$$

Δεδομένου ότι το A είναι αριθμήσιμο, υπάρχει συνάρτηση f η οποία απεικονίζει το A ένα προς ένα στο $\mathbb{N}$.

Η βασική ιδέα της απόδειξης είναι να απεικονίσουμε το σύνολο S ένα προς ένα στο $\mathbb{N}$ αντιστοιχίζοντας στην ακολουθία $\langle a_0, a_1, \ldots, a_m \rangle$ τον αριθμό $2^{f(a_0)+1} 3^{f(a_1)+1} \cdot \ldots \cdot p_m^{f(a_m)+1}$, όπου p_m είναι ο $(m+1)$-οστός πρώτος αριθμός. Η επιλογή αυτή έχει το μειονέκτημα ότι η παραπάνω αντιστοίχιση πιθανόν να μην είναι καλά ορισμένη, διότι θα μπορούσαμε ενδεχομένως να έχουμε $\langle a_0, a_1, \ldots, a_m \rangle = \langle b_0, b_1, \ldots, b_n \rangle$, όπου τα a_i και b_j ανήκουν στο A αλλά $m \neq n$. Αυτό όμως δεν αποτελεί σοβαρό πρόβλημα· απλώς αντιστοιχίζουμε σε κάθε μέλος του S τον *μικρότερο* αριθμό που μπορεί να προκύψει με τον παραπάνω τρόπο, οπότε έχουμε μια καλά ορισμένη απεικόνιση η οποία, όπως μπορούμε να αντιληφθούμε εύκολα, είναι ένα προς ένα. $\dashv$

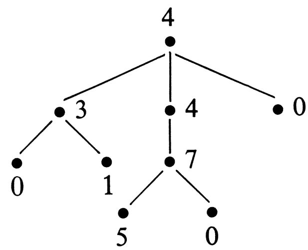
Στη μελέτη μας, θα τύχει περιστασιακά να αναφερθούμε σε *δέντρα*, τα οποία σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να παράσχουν εποπτικά χρήσιμες εικόνες. Ωστόσο, οι αναφορές μας σε δέντρα θα περιοριστούν σε άτυπα σχόλια· τα θεωρήματα και οι αποδείξεις δεν θα βασίζονται σε αυτά. Ως εκ τούτου, η παρακάτω παρουσίαση των δέντρων θα είναι επίσης άτυπη.

Για κάθε δέντρο, υπάρχει μια υποκείμενη πεπερασμένη μερική διάταξη. Η μερική αυτή διάταξη R μπορεί να αναπαρασταθεί σχηματικά ως εξής: αν $\langle a, b \rangle \in R$, τότε τοποθετούμε το a χαμηλότερα από το b και συνδέουμε τα δύο σημεία με ένα ευθύγραμμο τμήμα. Δύο τυπικές δενδροειδείς διατάξεις είναι οι ακόλουθες.



(Στα μαθηματικά, τα δέντρα αναπτύσσονται προς τα κάτω, και όχι προς τα πάνω.) Σε μια τέτοια εικόνα υπάρχει πάντοτε ένα ανώτατο σημείο (η *ρίζα*). Επιπλέον, ενώ επιτρέπεται να υπάρχουν διακλαδώσεις κάτω από οποιονδήποτε κόμβο, τα σημεία *επάνω* από οποιονδήποτε δεδομένο κόμβο θα πρέπει να κείνται σε μια γραμμή.

Εκτός από αυτήν την υποκείμενη πεπερασμένη μερική διάταξη, για κάθε δέντρο υπάρχει επίσης μια «επιγραφική» συνάρτηση, της οποίας το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο των κόμβων. Ένα ενδεικτικό δέντρο, στο οποίο οι επιγραφές είναι φυσικοί αριθμοί, είναι το ακόλουθο.



Σε λίγα σημεία της μελέτης μας σε αυτό το βιβλίο θα χρησιμοποιήσουμε το αξίωμα της επιλογής. Συνήθως, όμως, η χρήση αυτού του αξιώματος μπορεί να παραλειφθεί αν τα θεωρήματα που πραγματευόμαστε περιοριστούν σε αριθμήσιμες γλώσσες. Από τις πολλές ισοδύναμες διατυπώσεις του αξιώματος της επιλογής, ιδιαίτερα χρήσιμη είναι η μορφή του λήμματος του Zorn.

Λέμε ότι μια συλλογή C από σύνολα αποτελεί *αλυσίδα* ανν για οποιαδήποτε στοιχεία x και y της C έχουμε είτε $x \subseteq y$ είτε $y \subseteq x$.

Λήμμα του Zorn Έστω A ένα σύνολο τέτοιο ώστε για οποιαδήποτε αλυσίδα $C \subseteq A$, το σύνολο $\bigcup C$ ανήκει στο A. Στην περίπτωση αυτή, υπάρχει κάποιο στοιχείο $m \in A$ το οποίο είναι μεγιστιαίο, με την έννοια ότι δεν αποτελεί υποσύνολο κανενός άλλου στοιχείου του A.

Πληθάριθμοι

Όλα τα άπειρα σύνολα είναι μεγάλα, αλλά κάποια είναι μεγαλύτερα από άλλα. (Παραδείγματος χάριν, το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι μεγαλύτερο από το σύνολο των ακεραίων.) Οι πληθάριθμοι μας παρέχουν ένα εύχρηστο, αν και όχι «αναντικατάστατο», τρόπο να αναφερόμαστε στο μέγεθος διαφόρων συνόλων.

Είναι εύλογο να λέμε ότι δύο σύνολα A και B έχουν το ίδιο μέγεθος ανν υπάρχει συνάρτηση που απεικονίζει ένα προς ένα το A επί του B. Εάν τα A και B είναι πεπερασμένα, τότε η έννοια αυτή είναι ισοδύναμη με τη συνήθη έννοια του «ισομεγέθους»: Εάν αριθμήσουμε τα μέλη του A και τα μέλη του B, θα προκύψει και τις δύο φορές ο ίδιος αριθμός. Η έννοια αυτή όμως μπορεί να εφαρμοστεί ακόμη και σε άπειρα σύνολα A και B, όπου η αρίθμηση είναι δύσκολη.

Σε τυπικό επίπεδο, λοιπόν, λέμε ότι τα A και B είναι *ισοπληθή* (σε συμβολική μορφή: $A \sim B$) ανν υπάρχει ένα προς ένα συνάρτηση που απεικονίζει το A επί του B. Παραδείγματος χάριν, το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών και το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων είναι ισοπληθή. Όπως μπορούμε να αντιληφθούμε εύκολα, η σχέση της ισοπληθικότητας είναι ανακλαστική, συμμετρική, και μεταβατική.

Για πεπερασμένα σύνολα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως μέτρο του μεγέθους τους φυσικούς αριθμούς. Σε δύο πεπερασμένα σύνολα θα αποδιδόταν ο ίδιος φυσικός αριθμός (ως μέτρο του μεγέθους τους) ανν τα σύνολα ήταν ισοπληθή. Για να μπορέσουμε να γενικεύσουμε αυτήν την κατάσταση σε άπειρα σύνολα εισάγονται οι πληθάριθμοι.

Σε κάθε σύνολο A μπορούμε να αποδώσουμε ένα συγκεκριμένο «αντικείμενο», τον *πληθάριθμο* (ή *πληθικό αριθμό*, ή *πληθικότητα*) του A (που συμβολίζεται $\operatorname{card} A$), έτσι ώστε σε δύο σύνολα να αποδίδεται η ίδια πληθικότητα ανν τα σύνολα αυτά είναι ισοπληθή:

$$\operatorname{card} A = \operatorname{card} B \quad \text{ανν} \quad A \sim B. \tag{K}$$

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι να αποδώσουμε αυτό το «αντικείμενο»· ο καθιερωμένος τρόπος στις μέρες μας είναι να ορίσουμε ως $\operatorname{card} A$ το ελάχιστο τακτικό αριθμητικό που είναι ισοπληθές με το A. (Η επιτυχία αυτού του ορισμού βασίζεται στο αξίωμα της επιλογής.) Δεν πρόκειται να εξετάσουμε εδώ τα τακτικά αριθμητικά, διότι δεν έχει σχεδόν καμία σημασία για τη μελέτη μας τι είναι στην πραγματικότητα ο $\operatorname{card} A$, όπως δεν έχει σημασία τι είναι στην πραγματικότητα ο αριθμός 2. Το σημαντικότερο απ' όλα είναι ότι η (K) ισχύει. Ωστόσο, είναι χρήσιμο αν για ένα πεπερασμένο σύνολο A, ο $\operatorname{card} A$ είναι ο φυσικός αριθμός που δηλώνει πόσα στοιχεία έχει το A. Χαρακτηρίζουμε κάτι *πληθάριθμο*, ή *πληθικό* (αριθμό), ανν είναι $\operatorname{card} A$ για κάποιο σύνολο A.

(Ο Georg Cantor, ο οποίος ήταν αυτός που εισήγαγε την έννοια του πληθάριθμου, χαρακτήρισε το 1985 τον πληθάριθμο ενός συνόλου M «τη γενική έννοια η οποία, με τη βοήθεια της ενεργού διάνοιάς μας, απορρέει από το σύνολο M κατόπιν αφαίρεσης από τη φύση των διαφόρων στοιχείων του και από τη δοθείσα διάταξή τους.»)

Λέμε ότι το A *κυριαρχείται* από το B (σε συμβολική γραφή, $A \preceq B$) ανν το A είναι ισοπληθές με ένα υποσύνολο του B. Με άλλα λόγια, $A \preceq B$ ανν υπάρχει ένα προς ένα συνάρτηση που απεικονίζει το A στο B. Η αντίστοιχη έννοια για τους πληθάριθμους είναι

$$\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B \quad \text{ανν} \quad A \preceq B.$$

(Όπως μπορούμε να αντιληφθούμε εύκολα, η σχέση «$\leq$» είναι καλά ορισμένη· δηλαδή, το κατά πόσο $\kappa \leq \lambda$ εξαρτάται μόνο από τους ίδιους τους πληθάριθμους κ και λ, και όχι από την επιλογή των συνόλων που έχουν αυτές τις πληθικότητες.) Η κυριαρχία είναι ανακλαστική και μεταβατική. Ένα σύνολο A κυριαρχείται από το $\mathbb{N}$ ανν το A είναι αριθμήσιμο. Ένα γνωστό σχετικό θεώρημα είναι το ακόλουθο.

Θεωρημα Schröder–Bernstein
(α) Για οποιαδήποτε σύνολα A και B, αν $A \preceq B$ και $B \preceq A$, τότε $A \sim B$.
(β) Για οποιουσδήποτε πληθάριθμους κ και λ, αν $\kappa \leq \lambda$ και $\lambda \leq \kappa$, τότε $\kappa = \lambda$.

Το σκέλος (β) είναι απλή αναδιατύπωση του σκέλους (α) συναρτήσει των πληθάριθμων. Το ακόλουθο θεώρημα, που τυχαίνει να είναι ισοδύναμο με το αξίωμα της επιλογής, διατυπώνεται με τον ίδιο δυϊκό τρόπο.

Θεωρημα 0C (α) Για οποιαδήποτε σύνολα A και B, είτε $A \preceq B$ είτε $B \preceq A$.
(β) Για οποιουσδήποτε πληθάριθμους κ και λ, είτε $\kappa \leq \lambda$ είτε $\lambda \leq \kappa$.

Συνεπώς, για οποιουσδήποτε δύο πληθάριθμους, ο ένας είναι μικρότερος από τον άλλο. (Μάλιστα, οποιοδήποτε μη κενό σύνολο πληθάριθμων περιέχει έναν ελάχιστο αριθμό.) Οι μικρότεροι δυνατοί πληθάριθμοι είναι αυτοί των πεπερασμένων συνόλων: $0, 1, 2, \ldots$. Στη συνέχεια, έχουμε τον μικρότερο δυνατό άπειρο πληθάριθμο, τον $\operatorname{card} \mathbb{N}$, ο οποίος ονομάζεται $\aleph_0$ (προφέρεται «άλεφ μηδέν»). Συνεπώς, έχουμε

$$0, 1, 2, \ldots, \aleph_0, \aleph_1, \ldots,$$

όπου $\aleph_1$ είναι ο μικρότερος δυνατός πληθάριθμος που είναι μεγαλύτερος του $\aleph_0$. Η πληθικότητα των πραγματικών αριθμών, $\operatorname{card} \mathbb{R}$, ονομάζεται «$2^{\aleph_0}$». Δεδομένου ότι το σύνολο $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο, έχουμε ότι $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$.

Οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, προ πολλού γνωστές για τους πεπερασμένους πληθάριθμους, μπορούν να επεκταθούν σε όλους τους πληθάριθμους. Για να υπολογίσουμε το άθροισμα $\kappa + \lambda$ επιλέγουμε ξένα σύνολα A και B πληθικότητας κ και λ, αντίστοιχα, οπότε έχουμε

$$\kappa + \lambda = \operatorname{card}(A \cup B).$$

Η πράξη αυτή είναι καλά ορισμένη, δηλ. το $\kappa + \lambda$ εξαρτάται μόνο από τα κ και λ, και όχι από την επιλογή των ξένων συνόλων A και B. Για τον πολλαπλασιασμό, χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\kappa \cdot \lambda = \operatorname{card}(A \times B).$$

Οι ορισμοί αυτοί είναι εμφανώς σωστοί για πεπερασμένους πληθάριθμους. Η αριθμητική των άπειρων πληθάριθμων είναι αναπάντεχα απλή (βάσει του αξιώματος της επιλογής). Το άθροισμα ή το γινόμενο δύο άπειρων πληθάριθμων ισούται απλώς με τον μεγαλύτερο από τους δύο τους:

Θεωρημα της αριθμητικης πληθαριθμων Για δύο πληθάριθμους κ και λ, αν $\kappa \leq \lambda$ και ο λ είναι άπειρος, τότε $\kappa + \lambda = \lambda$. Επιπλέον, αν $\kappa \neq 0$, τότε $\kappa \cdot \lambda = \lambda$.

Ειδικότερα, για κάθε άπειρο πληθάριθμο κ,

$$\aleph_0 \cdot \kappa = \kappa.$$

Θεωρημα 0D Για ένα άπειρο σύνολο A, το σύνολο $\bigcup_n A^{n+1}$ όλων των πεπερασμένων ακολουθιών από στοιχεία του A έχει πληθικότητα ίση με $\operatorname{card} A$.

Έχουμε ήδη αποδείξει το θεώρημα αυτό για την περίπτωση ενός αριθμήσιμου συνόλου A (βλ. Θεώρημα 0B).

Αποδειξη. Βάσει του θεωρήματος της αριθμητικής πληθάριθμων (εφαρμοσμένου n φορές), κάθε σύνολο A^{n+1} έχει πληθικότητα ίση με $\operatorname{card} A$. Επομένως, έχουμε την ένωση $\aleph_0$ συνόλων αυτού του μεγέθους, η οποία δίνει συνολικά $\aleph_0 \cdot \operatorname{card} A = \operatorname{card} A$ σημεία. ⊣

Παραδειγμα. Έπεται ότι το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών έχει πληθικότητα $\aleph_0$. Κατ' αρχάς, μπορούμε να χαρακτηρίσουμε κάθε πολυώνυμο (μίας μεταβλητής) πάνω στους ακεραίους μέσω της ακολουθίας των συντελεστών του. Σύμφωνα με το θεώρημα, υπάρχουν $\aleph_0$ πολυώνυμα. Καθένα από αυτά έχει πεπερασμένο πλήθος ριζών. Για να θέσουμε ένα υπερβολικό άνω φράγμα, παρατηρούμε ότι ακόμη και αν κάθε πολυώνυμο είχε $\aleph_0$ ρίζες, θα είχαμε συνολικά $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ αλγεβρικούς αριθμούς. Αφού υπάρχουν τουλάχιστον τόσοι τέτοιοι αριθμοί, το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

Δεδομένου ότι υπάρχουν υπεραριθμήσιμοι (στην πραγματικότητα, $2^{\aleph_0}$) πραγματικοί αριθμοί, έπεται ότι υπάρχουν υπεραριθμήσιμοι (στην πραγματικότητα, $2^{\aleph_0}$) υπερβατικοί αριθμοί.