ΕΙΣΑΓΩΓΗ

α) Ιστορική αναδρομή

Η πρώτη γνώση των ηλεκτρικών φαινομένων χρονολογείται από το 600 π.Χ. περίπου, όταν ο Θαλής ο Μιλήσιος παρατήρησε ότι το *ήλεκτρο* μετά από τριβή π.χ. με μάλλινο ύφασμα, αποκτά την ιδιότητα να έλκει μικρά ελαφρά σώματα. Λέγεται ότι ο Θαλής ο Μιλήσιος είχε παρατηρήσει, επίσης, και την ελκτική δράση που εξασκεί ο φυσικός μαγνήτης πάνω σε τεμάχια σιδήρου.

Λίγους αιώνες αργότερα ο Αριστοτέλης αναφέρεται στη χρησιμοποίηση των ηλεκτρικών εκκενώσεων του ηλεκτρόψαρου (μουδιάστρας) για τη θεραπεία αρθριτικών παθήσεων. Αναφέρεται, επίσης, ότι οι αρχαίοι Ινδοί γνώριζαν το φαινόμενο της ηλέκτρισης κρυστάλλων μετά από θέρμανσή τους (πυροηλεκτρικό φαινόμενο).

Φαίνεται, όμως, πως οι αναζητήσεις και γνώσεις των αρχαίων αυτών σοφών προέτρεχαν πολύ της εποχής τους, αφού χρειάστηκε να περάσουν περίπου δύο χιλιετηρίδες και να φθάσουμε στο 1600, οπότε ο Άγγλος γιατρός Gilbert εισήγαγε τον όρο **ηλεκτρισμός**, αφού προηγουμένως διαπιστώθηκε ότι και άλλα σώματα, όπως π.χ. το γυαλί, το θειάφι, το ρετσίνι κλπ., αποκτούν μετά από τριβή ανάλογες με το ήλεκτρο ελκτικές ιδιότητες. Τα σώματα αυτά που, όπως το ήλεκτρο, μετά από τριβή ασκούν ελκτικές δράσεις, ο Gilbert τα ονόμασε *ιδιοηλεκτρικά* και τα διέκρινε από τα *ανηλεκτρικά*, δηλαδή τα σώματα εκείνα που μετά από τριβή δεν αποκτούν παρόμοιες ιδιότητες. Για τη διαδικασία με την οποία τα διάφορα σώματα αποκτούν τις ιδιότητες του ηλέκτρου υιοθετήθηκε ο όρος **ηλέκτριση**, ενώ για τα σώματα στα οποία έχει λάβει χώρα η διαδικασία αυτή υιοθετήθηκε ο όρος **ηλεκτρισμένα σώματα**. Επίσης, οι δράσεις των ηλεκτρισμένων σωμάτων ονομάστηκαν **ηλεκτρικές δράσεις**. Ο Gilbert προχώρησε ακόμη και στην πειραματική θεμελίωση του **μαγνητισμού** και τη σαφή διάκριση μεταξύ των ηλεκτρικών και μαγνητικών δράσεων, διάκριση που, ας σημειωθεί, είχε ήδη κάνει προηγουμένως ο Ιταλός Girolamo (1551).

Στη συνέχεια και σ' όλη σχεδόν την διάρκεια του 17ου αιώνα και μέχρι τις αρχές του 18ου αιώνα, διατυπώθηκαν διάφορες υποθέσεις και θεωρίες – αντιφατικές ως επί το πλείστον – για τη φύση του ηλεκτρισμού και των ηλεκτρικών δράσεων.

Έτσι, αρχικά ο Gilbert απέδωσε την ικανότητα των ηλεκτρισμένων σωμάτων να ασκούν δράσεις σε άλλα σώματα σε μια φυσική δύναμη την οποία ονόμασε *ηλεκτρική*.

Μια δεύτερη υπόθεση που διατυπώθηκε για την ερμηνεία των ηλεκτρικών δράσεων μεταξύ των ηλεκτρισμένων σωμάτων βασίστηκε στην παραδοχή της ύπαρξης της *ηλεκτρικής* ατμόσφαιρας που περιβάλλει δήθεν τα σώματα αυτά.

Μια τρίτη, τέλος, θεωρία που υποστηρίχτηκε από τον Descartes (Καρτέσιο), απέδιδε την ηλεκτρική ιδιότητα σε μια πολύ λεπτή ουσία που κινείται ταχύτατα ανάμεσα στους πόρους των σωμάτων. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, κατά την τριβή ενός σώματος, η ουσία αυτή εξέρχεται από τους πόρους του σώματος έχοντας τη μορφή πολύ λεπτών ινών και εισδύει στους πόρους των γύρω σωμάτων.

Παράλληλα, όμως, με τις θεωρητικές έρευνες εμφανίζεται και η πρώτη υποτυπώδης ηλεκτροστατική μηχανή (που στην ουσία δεν ήταν τίποτε άλλο παρά μια στρεφόμενη ηλεκτρισμένη σφαίρα από θειάφι) από το Γερμανό Guericke. Ο Guericke παρατήρησε, επίσης, τις απωστικές δράσεις μεταξύ αρχικά αφόρτιστων σωμάτων που στο μεταξύ είχαν έρθει σε επαφή με το ίδιο ηλεκτρισμένο σώμα.

Στα 1727, ο Άγγλος Gray διεπίστωσε ότι και οι αγωγοί (τα *“ανηλεκτρικά”*, δηλαδή, σώματα) μπορούν να ηλεκτριστούν, αρκεί να ηλεκτρομονωθούν προηγούμενα.

Λίγα χρόνια αργότερα, ο Γάλλος Du Fay (1733) προβαίνει στη σαφή διάκριση μεταξύ των ελκτικών και απωστικών δράσεων, ενώ συγχρόνως παρατηρεί ότι και το ανθρώπινο σώμα μπορεί να ηλεκτριστεί. Η εισαγωγή του όρου **ηλεκτρικό φορτίο** οφείλεται στον Αμερικανό B. Franklin, (1747) ο οποίος, εκτός των άλλων, ασχολήθηκε με την πειραματική μελέτη των ηλεκτρικών ατμοσφαιρικών εκκενώσεων και εφεύρε το αλεξικέραυνο. Επίσης, στον B. Franklin οφείλεται και η εισαγωγή των – αυθαίρετων – όρων **θετικό** και **αρνητικό ηλεκτρικό φορτίο**.

Η πρώτη ποσοτική σχέση του ηλεκτρισμού διατυπώνεται από τον Γάλλο Coulomb στα 1785, ύστερα από πολύχρονη πειραματική έρευνα που αξιοποίησε τον ομώνυμο ζυγό στρέψης. Με τη βοήθεια του ζυγού αυτού, ο Coulomb μέτρησε τις δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ ηλεκτρισμένων σωμάτων και μεταξύ μαγνητών. Στην πειραματική διαπίστωση του ίδιου νόμου, χωρίς όμως να δημοσιεύσουν επίσημα τα αποτελέσματα των πειραμάτων τους, φαίνεται να είχαν φθάσει, είκοσι περίπου χρόνια πριν τον Coulomb, και οι Άγγλοι Priestley και Cavendish. Γι’ αυτό, ο νόμος του Coulomb αναφέρεται μερικές φορές και ως ο νόμος του Priestley στην ηλεκτροστατική.

Ο Άγγλος Faraday, μισό περίπου αιώνα μετά τον Coulomb, επιβεβαιώνοντας την ορθότητα του ομώνυμου νόμου του, απέδειξε ότι η δύναμη με την οποία αλληλεπενεργούν δύο ηλεκτρισμένα σώματα εξαρτάται από τη διηλεκτρικότητα του μέσου στο οποίο βρίσκονται τα σώματα αυτά.

Από τα σχετικά πειράματα διαπιστώθηκε η αναλογία ανάμεσα στον νόμο του Coulomb και τον νόμο της έλξης των μαζών του Newton με την εξής, όμως, σημαντική διαφορά: ενώ οι δυνάμεις μεταξύ των μαζών είναι πάντα ελκτικές, οι ηλεκτρικές δυνάμεις μπορεί να είναι είτε ελκτικές είτε απωστικές.

Πολύ σημαντικές στην ιστορία του ηλεκτρισμού θεωρούνται οι ανακαλύψεις από τους Ιταλούς Galvani (1791) και Volta (1794) των χημικών και επαφικών πηγών, που οδήγησαν στην διαμόρφωση των εννοιών της **ηλεκτρεργετικής δύναμης** και του **ηλεκτρικού ρεύματος**. Ο Galvani, παρατηρώντας τις συσπάσεις των μυών βατράχων που είχαν κρεμαστεί με χάλκινα άγκιστρα από μια σιδερένια ράβδο, οδηγήθηκε στη λαθεμένη παραδοχή του *"ζωικού ηλεκτρισμού"* που οφείλεται στα νεύρα και τους μυς. Λίγο αργότερα, ο Volta απέδειξε ότι αιτία της παρουσίας ηλεκτρισμού, που προκαλεί τις συσπάσεις των βατράχων, είναι η ηλεκτρική τάση που αναπτύσσεται κατά την επαφή των δύο διαφορετικών μετάλλων. Οι παρατηρήσεις αυτές, που οδήγησαν τον Volta (1800) στην κατασκευή του πρώτου ηλεκτρικού στοιχείου, σηματοδότησαν την αρχή ενός νέου κλάδου της επιστήμης του ηλεκτρισμού, της **ηλεκτροδυναμικής**. Έτσι, σε αντιδιαστολή προς τις ηλεκτροστατικές δράσεις μεταξύ ακίνητων φορτίων, εισάγεται ο όρος ηλεκτροδυναμικές δράσεις για τις δράσεις μεταξύ κινούμενων ηλεκτρικών φορτίων.

Ο **ηλεκτρομαγνητισμός**, ως ιδιαίτερος επιστημονικός κλάδος, αρχίζει να διαμορφώνεται περί το 1820, με τη διαπίστωση από τον Δανό Oersted της σχέσης μεταξύ ηλεκτρικών και μαγνητικών φαινομένων. Συγκεκριμένα, ο Oersted διεπίστωσε την αλληλεπίδραση μεταξύ ηλεκτρικών ρευμάτων και μόνιμων μαγνητών, παρατηρώντας τις αποκλίσεις μιας μαγνητικής βελόνας όταν βρεθεί κοντά σε ηλεκτρικά ρεύματα. Περίπου την ίδια εποχή, ο Γάλλος Ampère μελέτησε τις δυνάμεις αλληλεπίδρασης των ηλεκτρικών ρευμάτων και προχώρησε, επεκτείνοντας τις παρατηρήσεις του Oersted, στην διατύπωση πλήρους θεωρίας βασισμένης σε τέσσερα πειράματα. Ο Ampère απέδειξε ότι οι ιδιότητες των μόνιμων μαγνητών μπορούν να ερμηνευθούν με βάση την παραδοχή ότι στα μόρια των μαγνητισμένων σωμάτων κυκλοφορούν ηλεκτρικά ρεύματα.

Σημαντικός σταθμός στην ιστορία του ηλεκτρομαγνητισμού υπήρξε η διατύπωση από τον Άγγλο Faraday (1831) του ομώνυμου νόμου της **ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής**. Η διατύπωση του νόμου της επαγωγής από τον Faraday, που επίσης απέδειξε τη δυνατότητα μετατροπής του μηχανικού έργου σε ηλεκτρική ενέργεια, έδωσε μεγάλη ώθηση στην εξέλιξη του ηλεκτρομαγνητισμού. Ας σημειωθεί ότι στον νόμο της επαγωγής είχε καταλήξει, την ίδια περίπου εποχή με τον Faraday, και ο Henry στις ΗΠΑ, χωρίς όμως να προβεί σε δημοσίευση των σχετικών συμπερασμάτων.

Η διατύπωση του νόμου της επαγωγής βοήθησε σημαντικά στην κατανόηση και άλλων ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων, καθώς επίσης και στη σχεδίαση, κατασκευή και λειτουργία διαφόρων μηχανών, διατάξεων και συστημάτων.

Ενδεικτικά, αναφέρουμε τον **νόμο (ή κανόνα) του Lentz** (1833), την επαγωγή **δινορευμάτων ή ρευμάτων Foucault** (1855) και την κατασκευή των πρώτων βιομηχανικών **γεννητριών εναλλασσομένου** (1860) καθώς και **συνεχούς** (1869) ρεύματος. Στο μεταξύ, ο Joule (1841) επεξέτεινε τον **νόμο του Ohm** (1827) και υπολόγισε τις απώλειες σε μια ωμική αντίσταση, ενώ ο Kirchhoff (1845) προσδιόρισε τις νομοτέλειες της ροής του ηλεκτρικού ρεύματος στα ηλεκτρικά κυκλώματα διατυπώνοντας τους δύο **ομώνυμους νόμους**.

Το 1873 ο Άγγλος Maxwell δημοσίευσε το περίφημο σύγγραμμά του "*A Treatise on Electricity and Magnetism*" στο οποίο, διευρύνοντας και επεκτείνοντας τις ιδέες του Faraday, προχώρησε σε μια γενική διατύπωση της θεωρίας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Ο Maxwell, πέτυχε να συνοψίσει όλες τις μέχρι τότε γνώσεις του ηλεκτρομαγνητισμού σε ένα πολύ μικρό αριθμό απλών μαθηματικών εξισώσεων. Οι εξισώσεις αυτές αποτελούν το 'Α και το Ω' στη θεωρία του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, αφού περιγράφουν και ερμηνεύουν με, ίσως μοναδική στην ιστορία των φυσικών επιστημών πληρότητα, το σύνολο των ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων. Ο Maxwell πέτυχε να περιγράψει με απλούς μαθηματικούς όρους της διανυσματικής ανάλυσης ό,τι ο Faraday και οι άλλοι μέχρι τότε μεγάλοι ερευνητές είχαν διαπιστώσει, κύρια, με το πείραμα και τη φυσική διαίσθηση.

Ο Maxwell, καθώς, εκτός από δεινός μαθηματικός, ήταν συγχρόνως και μεγαλοφυής φυσικός, προχώρησε σε πρωτοποριακά για την εποχή του συμπεράσματα. Έτσι, με βάση τις εξισώσεις που απεδείκνυαν την αλληλεξάρτηση μεταξύ του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου, προέβλεψε την ύπαρξη και **διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων**, υπολόγισε την ταχύτητα του φωτός και κατέληξε στο, πολύ τολμηρό για την εποχή του συμπέρασμα, ότι και το φως είναι ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Είναι πραγματικά απορίας άξιο, πώς η μεγάλη αυτή ιδιοφυΐα δεν τόλμησε να προχωρήσει και στην απόρριψη της ιδέας του αιθέρα για το άπειρο μέσο.

Η πειραματική επαλήθευση των εξισώσεων Maxwell έγινε είκοσι περίπου χρόνια αργότερα, από τον Γερμανό Hertz που ερμήνευσε θεωρητικά και επαλήθευσε πειραματικά την ύπαρξη των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

Όπως ήταν φυσικό, η διατύπωση των εξισώσεων Maxwell και τα συνακόλουθα πειραματικά συμπεράσματα, αποτέλεσαν ισχυρή βάση, όχι μόνο για τη συστηματική θεμελίωση της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας, αλλά και την ανάπτυξη νέων θεωριών στη φυσική. Θα έπαιρνε πολύ μάκρος και θα ξέφευγε, ασφαλώς, από την πρόθεση μιας σύντομης ιστορικής αναδρομής στην εξέλιξη του ηλεκτρομαγνητισμού, ακόμη και η απλή παράθεση των πιο σημαντικών γεγονότων που σημειώθηκαν από το τέλος του 19ου αιώνα μέχρι σήμερα.

Τα γεγονότα αυτά, τα περισσότερα γνωστά ήδη στον αναγνώστη, έχουν χωρίς υπερβολή επηρεάσει, όχι μόνο τους υλικούς όρους διαβίωσης των κατοίκων του πλανήτη μας, αλλά και τον χαρακτήρα και την ποιότητα του σύγχρονου πολιτισμού μας.

Η μεγάλη ανάπτυξη της ηλεκτρο-επιστήμης στο τελευταίο αυτό διάστημα, οδήγησε στην διαμόρφωση πολλών επί μέρους επιστημονικών κλάδων με ειδικότερη θεματολογία. Ο αναγνώστης καλείται να ανατρέξει στη βιβλιογραφία που αναφέρεται στην εξέλιξη του κάθε κλάδου ξεχωριστά για την παρακολούθηση της συνέχειας της πιο πάνω σύντομης ιστορικής αναδρομής.

β) Μακροσκοπική θεώρηση των ηλεκτρομαγνητικών δράσεων

Οι εργασίες των Ampère, Faraday, Maxwell και Hertz οδήγησαν στην περιγραφή των ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων και βοήθησαν τους μετέπειτα ερευνητές στη μελέτη της ατομικής δομής της ύλης.

Ο Ολλανδός Lorentz διετύπωσε το 1909 την **κλασική ηλεκτρονική θεωρία** σύμφωνα με την οποία τα άτομα της ύλης είναι σύνθετοι σχηματισμοί αποτελούμενοι από θετικά και αρνητικά σωματίδια. Η θεωρία αυτή απέβλεπε στην ερμηνεία των ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων που παρατηρούνται σε μακροσκοπική κλίμακα, με βάση τη μικροσκοπική ηλεκτροδυναμική, δηλαδή με βάση μια ορισμένη θεωρία για την ατομική δομή της ύλης και τους νόμους που διέπουν την κίνηση και τις αμοιβαίες δράσεις των φορτισμένων σωματιδίων. Ο Lorentz διετύπωσε, επίσης, τις ομώνυμες εξισώσεις (μετασχηματισμούς) που χρησιμοποιήθηκαν από τον Einstein στην διατύπωση της **θεωρίας της σχετικότητας**.

Η μελέτη των φαινομένων που σχετίζονται με την παρουσία ακίνητων ή κινούμενων ηλεκτρικών φορτίων αποτελεί αντικείμενο του **κλασικού ηλεκτρομαγνητισμού**, που τις βασικές του αρχές πραγματεύεται το παρόν βιβλίο.

Στη θεμελίωση της θεωρίας του κλασικού ηλεκτρομαγνητισμού, δεχόμαστε ότι τα άτομα της ύλης αποτελούνται από τον θετικά φορτισμένο πυρήνα και τα περί τον πυρήνα στρεφόμενα και αρνητικά φορτισμένα ηλεκτρόνια. Τα πρωτόνια, που είναι τα θετικά φορτισμένα σωματίδια του πυρήνα, έχουν μάζα πολύ μεγαλύτερη από τη μάζα του ηλεκτρονίου, αλλά το φορτίο του κάθε πρωτονίου είναι ίσο και αντίθετο προς το στοιχειώδες φορτίο του ηλεκτρονίου. Στην κανονική κατάσταση, κάθε άτομο περιέχει ίσο αριθμό πρωτονίων και ηλεκτρονίων, εμφανίζεται, δηλαδή, ηλεκτρικά ουδέτερο. Κάτω από ορισμένες, όμως, συνθήκες είναι δυνατή η απομάκρυνση πολλών ηλεκτρονίων από τα άτομα ενός σώματος, με αποτέλεσμα να προκύπτουν ξεχωριστά θετικά και αρνητικά φορτία. Στην απομάκρυνση αυτή των ηλεκτρονίων από τη στενή ατομική τους περιοχή οφείλονται όλα, σχεδόν, τα παρατηρούμενα ηλεκτρικά φαινόμενα στη φύση.

Δύο πολύ βασικές ιδιότητες που χαρακτηρίζουν το ηλεκτρικό φορτίο και χρησιμοποιεί η κλασική θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού είναι η **αρχή διατήρησης** και η **κβάντωση** του ηλεκτρικού φορτίου. Η αρχή διατήρησης περιγράφει την ιδιότητα ότι το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο ενός κλειστού συστήματος παραμένει σταθερό, ενώ η κβάντωση περιγράφει την ιδιότητα ότι κάθε ηλεκτρικό φορτίο είναι ακέραιο πολλαπλάσιο ενός στοιχειώδους φορτίου. Το στοιχειώδες αυτό φορτίο, στο οποίο είναι "κβαντισμένο" το ηλεκτρικό φορτίο, είναι ίσο με το φορτίο $-e = -1,602 \cdot 10^{-19}$ C του ηλεκτρονίου.

Η συστηματική μελέτη των ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων συνεχίστηκε, με αφετηρία τις εξισώσεις Maxwell, όπως είπαμε, με τις εργασίες διαφόρων ερευνητών. Ως σημαντικότερους σταθμούς στην εξέλιξη του ηλεκτρομαγνητισμού, αλλά και της φυσικής γενικότερα, μπορούμε να αναφέρουμε τη θεωρία της σχετικότητας του Einstein, τη θεωρία των κβάντα του Planck, τη θεωρία για τη δομή του ατόμου του Bohr, τη θεωρία της κυματομηχανικής του De Broglie και την αρχή της απροσδιοριστίας του Heisenberg. Η μελέτη, όμως, των θεωριών αυτών καθώς επίσης και διαφόρων σύγχρονων θεωριών, βρίσκεται έξω από το περιεχόμενο ενός βιβλίου, όπως το παρόν, που αποβλέπει, κυρίως, στην εισαγωγική παρουσίαση των βασικών αρχών και εφαρμογών της θεωρίας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Θα πρέπει, όμως, να αναφέρουμε, ότι όλες οι πιο πάνω θεωρίες, δεν επηρέασαν, σχεδόν καθόλου, τη θεωρία του κλασικού ηλεκτρομαγνητισμού, ούτε επέβαλαν οποιαδήποτε διαφοροποίηση ή αναθεώρηση. Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να πούμε ότι οι αντιλήψεις για τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα που διαμορφώθηκαν μέχρι τις αρχές του 20ου αιώνα εξακολουθούν να ισχύουν και μετά τη διατύπωση της θεωρίας της σχετικότητας και της θεωρίας των κβάντα, που έφεραν τη γνωστή επανάσταση στην κλασική φυσική.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΟΙ ΒΑΣΙΚΟΙ ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

1.1 Μονάδες και σύμβολα φυσικών μεγεθών

Πριν προχωρήσουμε στη μελέτη των βασικών νόμων του ηλεκτροστατικού πεδίου κρίνουμε σκόπιμο να κάνουμε μια σύντομη αναφορά στους συμβολισμούς και τα *συστήματα μονάδων* που θα χρησιμοποιηθούν σ' όλη, σχεδόν, την έκταση του παρόντος βιβλίου.

Ως γνωστόν, για τον ποσοτικό προσδιορισμό των διαφόρων φυσικών μεγεθών απαιτείται να οριστούν οι *μονάδες* των αντίστοιχων μεγεθών.

Η αναγραφή του *συμβόλου* ενός φυσικού μεγέθους εκφράζει, εξ' ορισμού, το γινόμενο της αριθμητικής του τιμής, δηλαδή του μέτρου του, και της αντίστοιχης μονάδας.

Αν και οι μονάδες μέτρησης όλων των φυσικών μεγεθών μπορούν να εκλεγούν ελεύθερα, εντούτοις, για την απλούστερη διατύπωση των μαθηματικών σχέσεων που περιγράφουν τους διάφορους φυσικούς νόμους, είναι σκόπιμο να χρησιμοποιούνται συγκεκριμένες μονάδες στις οποίες θα εκφράζονται τόσο τα γνωστά όσο και τα ζητούμενα μεγέθη. Έτσι, και επειδή τα διάφορα φυσικά μεγέθη συνδέονται μεταξύ τους με μαθηματικές σχέσεις που περιγράφουν φυσικούς νόμους ή φαινόμενα, κρίνεται απαραίτητη η υιοθέτηση ενός ενιαίου συστήματος μονάδων που θα χρησιμοποιεί τον ελάχιστο δυνατό αριθμό βασικών μεγεθών αναφοράς.

Οι μονάδες αυτές των μεγεθών αναφοράς ονομάζονται *βασικές ή θεμελιώδεις*, ενώ οι μονάδες των υπόλοιπων φυσικών μεγεθών, που προκύπτουν από τις βασικές μονάδες, ονομάζονται *παράγωγες ή δευτερεύουσες*.

Στη μηχανική, ως γνωστόν, το απλούστερο αλλά και συγχρόνως το πλέον εύχρηστο σύστημα αναφοράς είναι το "τριαδικό" σύστημα που χρησιμοποιεί ως βασικά μεγέθη ή διαστάσεις το *μήκος* (L), τη *μάζα* (M) και το *χρόνο* (T). Όλα τα άλλα μεγέθη της μηχανικής προκύπτουν από τα πιο πάνω τρία. Έτσι, για παράδειγμα, η επιφάνεια S εκφράζεται ως $[S] = (\text{μήκος})^2$ (ή $[S] = L^2$) και η δύναμη F ως $[F] = (\text{μήκος}) \times (\text{μάζα}) \times (\text{χρόνος})^{-2}$ (ή $[F] = LMT^{-2}$).

Κρίνουμε σκόπιμο στο σημείο αυτό να υπενθυμίσουμε τη βασική αρχή της διαστασιακής ανάλυσης, σύμφωνα με την οποία σε οποιαδήποτε μαθηματική εξίσωση, που περιγράφει κάποιο φυσικό νόμο ή φαινόμενο, πρέπει να υπάρχει ταυτότητα διαστάσεων στα δύο μέλη.

Το πιο πάνω σύστημα αναφοράς, όμως, δεν επαρκεί για την ακριβή περιγραφή και των μεγεθών του ηλεκτρομαγνητισμού. Για τη δημιουργία ενός πλήρους συστήματος, που να μπορεί να συμπεριλάβει και όλα τα ηλεκτρικά και μαγνητικά μεγέθη, απαιτείται η επέκταση του πιο πάνω τριαδικού συστήματος σ' ένα "τετραδικό" σύστημα, που θα έχει ως τέταρτο βασικό μέγεθος (ή τέταρτη διάσταση) ένα καθαρά ηλεκτρικό (ή μαγνητικό) μέγεθος όπως π.χ. το ηλεκτρικό ρεύμα ή το ηλεκτρικό φορτίο. Στην περίπτωση όπου ως τέταρτο βασικό (θεμελιώδες) μέγεθος επιλέγεται το ηλεκτρικό ρεύμα (ή το ηλεκτρικό φορτίο), χρησιμοποιείται αντίστοιχα προς τα διαστασιακά σύμβολα L, M, T το σύμβολο I (ή Q). Έτσι, όλα τα μεγέθη του ηλεκτρομαγνητισμού μπορούν να προκύψουν από τα πιο πάνω τέσσερα θεμελιώδη μεγέθη και να αναλυθούν στις τέσσερις βασικές διαστάσεις L, M, T, I.

Μέχρι σήμερα έχουν, κατά καιρούς, προταθεί διάφορα συστήματα μονάδων. Οι απαιτήσεις, όμως, και οι ανάγκες της σύγχρονης επιστήμης και τεχνολογίας επέβαλαν την αποκλειστική σχεδόν χρησιμοποίηση δύο μόνο συστημάτων: του συστήματος μονάδων CGS (ή συστήματος μονάδων Gauss) και του κανονικοποιημένου συστήματος μονάδων MKSA (ή Διεθνούς Συστήματος Μονάδων (SI)).

Το σύστημα CGS, που το όνομά του προέρχεται από τα αρχικά των βασικών μονάδων Centimeter (εκατοστόμετρο μήκους), Gram (γραμμάριο μάζας) και Second (δευτερόλεπτο χρόνου), είναι το αρχαιότερο, και – έστω περιορισμένα – χρησιμοποιείται ακόμη και σήμερα, στην κλασική κυρίως φυσική.

Το σύστημα MKSA που έλαβε το όνομά του από τα αρχικά των βασικών μονάδων Meter (μέτρο μήκους), Kilogram (χιλιόγραμμο μάζας), Second (δευτερόλεπτο χρόνου) και Ampère (Αμπέρ ηλεκτρικού ρεύματος), έχει προταθεί από το 1948 και χρησιμοποιείται ευρύτατα στην εφαρμοσμένη φυσική και, σχεδόν κατ' αποκλειστικότητα, στον εφαρμοσμένο ηλεκτρομαγνητισμό.

Επειδή το σύστημα αυτό υιοθετείται και στο παρόν βιβλίο, κρίνουμε σκόπιμο να προτάξουμε στην παράγραφο αυτή τις μονάδες των κυριότερων μεγεθών που χρησιμοποιούνται στον ηλεκτρομαγνητισμό. Η προέλευση των μονάδων των μεγεθών αυτών και η φυσική τους σημασία αναλύεται με λεπτομέρεια στα οικεία κεφάλαια.

Αρχικά δίνουμε τις μονάδες, στο σύστημα MKSA, των παρακάτω τριών βασικών μεγεθών της μηχανικής που χρησιμοποιούνται ευρύτατα και στα προβλήματα του ηλεκτρομαγνητισμού:

- **Δύναμη $\boldsymbol{F}$.** Η μονάδα Newton (N) της δύναμης ορίζεται ως η δύναμη που απαιτείται για να προσδώσει επιτάχυνση $1 \ \mathrm{m/s^2}$ σε μια μάζα $1 \ \mathrm{Kg}$

$$1 \ \mathrm{N} = 1 \ \frac{\mathrm{Kg\,m}}{\mathrm{s}^2} \tag{1.1}$$

• ***Έργο-Ενέργεια W.*** Μονάδα έργου (ή ενέργειας) είναι το Joule (J), που ορίζεται ως το έργο μιας δύναμης $1 \ \mathrm{N}$ κατά την παράλληλη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της σε απόσταση $1 \ \mathrm{m}$

$$1 \ \mathrm{J} = 1 \ \mathrm{Nm} = 1 \ \frac{\mathrm{Kg\,m}^2}{\mathrm{s}^2} \tag{1.2}$$

• **Ισχύς *P*.** Η μονάδα Watt (W) της ισχύος ορίζεται ως η ισχύς που αντιστοιχίζεται στην παραγωγή έργου $1 \ \mathrm{J}$ σε χρονικό διάστημα $1 \ \mathrm{s}$, δηλαδή

$$1 \ \mathrm{W} = 1 \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1 \ \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{s}} = 1 \ \frac{\mathrm{Kg\,m}^2}{\mathrm{s}^3} \tag{1.3}$$

Στη συνέχεια, δίνουμε τις μονάδες μερικών χαρακτηριστικών μεγεθών του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και τις αντίστοιχες σχέσεις ορισμού από τις οποίες προκύπτουν:

• ***Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος I.*** Η βασική (θεμελιώδης) μονάδα της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος, το Ampère (A), ορίζεται ως η ένταση ενός συνεχούς ηλεκτρικού ρεύματος που, όταν διαρρέει δύο ευθύγραμμους, παράλληλους, άπειρου μήκους αγωγούς που βρίσκονται σε απόσταση $1 \ \mathrm{m}$ μέσα στον κενό χώρο, προκαλεί την ανάπτυξη μιας δύναμης μεταξύ των αγωγών ίσης προς $2 \cdot 10^{-7} \ \mathrm{N}$ ανά μέτρο μήκους των αγωγών.

• **Ηλεκτρικό φορτίο *Q*.** Μονάδα του ηλεκτρικού φορτίου είναι το Coulomb (C) και ορίζεται ως η ποσότητα του ηλεκτρισμού (φορτίου) που διέρχεται σε $1 \ \mathrm{s}$ από οποιαδήποτε διατομή αγωγού όταν διαρρέεται από συνεχές ηλεκτρικό ρεύμα έντασης $1 \ \mathrm{A}$. Έχουμε, δηλαδή

$$1 \ \mathrm{C} = 1 \ \mathrm{As} \tag{1.4}$$

• **Ηλεκτρική τάση *U*.** Η μονάδα Volt (V) της ηλεκτρικής τάσης ορίζεται ως η τάση που υπάρχει ανάμεσα σε δύο σημεία, όταν κατά τη ροή ενός συνεχούς ηλεκτρικού ρεύματος έντασης $1 \ \mathrm{A}$, από το ένα σημείο στο άλλο, καταναλίσκεται ισχύς ίση προς $1 \ \mathrm{W}$. Επίσης, το Volt μπορεί να οριστεί και ως η τάση μεταξύ δύο σημείων, όταν για τη μεταφορά φορτίου $1 \ \mathrm{C}$ από το ένα σημείο στο άλλο, απαιτείται καταβολή έργου ίσου προς $1 \ \mathrm{J}$. Έχουμε, συνεπώς,

$$1 \ \mathrm{V} = 1 \ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{A}} = 1 \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} = 1 \ \frac{\mathrm{Kg\,m}^2}{\mathrm{As}^3} \tag{1.5}$$

Όπως θα δούμε αργότερα, την ίδια μονάδα χρησιμοποιούμε και για τη μέτρηση του βαθμωτού **ηλεκτρικού δυναμικού** ϕ.

• **Ηλεκτρική πεδιακή ένταση $\boldsymbol{E}$.** Η μονάδα της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης ορίζεται ως η ένταση ενός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου που εκτείνεται στο κενό και που εμφανίζει πτώση τάσης $1\,\mathrm{V}$ σε απόσταση $1\,\mathrm{m}$ κατά μήκος οποιασδήποτε δυναμικής γραμμής. Επίσης, η μονάδα της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης μπορεί να οριστεί και ως η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που ασκεί δύναμη 1 N σε σημειακό φορτίο 1 C. Ισχύει, δηλαδή, σύμφωνα με τα παραπάνω, η

$$1 \text{ μονάδα } \boldsymbol{E} = 1\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = 1\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = 1\ \frac{\mathrm{Kg\,m}}{\mathrm{As^3}} \tag{1.6}$$

• **Διηλεκτρική μετατόπιση $\boldsymbol{D}$.** Η μονάδα της διηλεκτρικής μετατόπισης ορίζεται ως η διηλεκτρική μετατόπιση που δημιουργείται στον χώρο μεταξύ των πλακών ενός επίπεδου πυκνωτή, όταν οι πλάκες του εκτείνονται μέχρι το άπειρο και είναι ομοιόμορφα φορτισμένες με φορτίο 1 C ανά m^2 επιφάνειας:

$$1 \text{ μονάδα } \boldsymbol{D} = 1\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m^2}} = 1\ \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{m^2}} \tag{1.7}$$

• **Χωρητικότητα $\boldsymbol{C}$.** Μονάδα της χωρητικότητας είναι το Farad (F) και ορίζεται ως η χωρητικότητα ενός πυκνωτή στους οπλισμούς του οποίου εμφανίζεται φορτίο 1 C όταν επιβληθεί σ' αυτούς διαφορά δυναμικού 1 V:

$$1\ \mathrm{F} = 1\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = 1\ \frac{\mathrm{A^2 s^4}}{\mathrm{Kg\,m^2}} \tag{1.8}$$

• **Ηλεκτρική αντίσταση $\boldsymbol{R}$.** Η μονάδα Ohm (Ω) της αντίστασης ορίζεται ως η αντίσταση ενός αγωγού που διαρρέεται από συνεχές ρεύμα έντασης 1 A όταν στα άκρα του εφαρμόζεται συνεχής τάση 1 V:

$$1\ \Omega = 1\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = 1\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{A^2}} = 1\ \frac{\mathrm{Kg\,m^2}}{\mathrm{A^2 s^3}} \tag{1.9}$$

• **Ηλεκτρική αγωγιμότητα $\boldsymbol{G}$.** Μονάδα της αγωγιμότητας G που ορίζεται από τη σχέση $G = 1/R$, είναι το Siemens (ή mho ή ℧):

$$1\ \mathrm{S} \equiv 1\ ℧ \equiv 1\ \mathrm{mho} \equiv \frac{1}{\Omega} = 1\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}} = 1\ \frac{\mathrm{A^2}}{\mathrm{W}} = 1\ \frac{\mathrm{A^2 s^3}}{\mathrm{Kg\,m^2}} \tag{1.10}$$

• **Ειδική αντίσταση $\boldsymbol{\rho}$.** Η μονάδα της ειδικής αντίστασης ρ προκύπτει από τη σχέση $R = \rho\ell/S$ που δίνει την ωμική αντίσταση ενός αγωγού μήκους ℓ και διατομής S, δηλαδή

$$1 \text{ μονάδα } \rho = 1\ \Omega\,\mathrm{m} = 1\ \frac{\mathrm{Vm}}{\mathrm{A}} = 1\ \frac{\mathrm{Wm}}{\mathrm{A^2}} = 1\ \frac{\mathrm{Kg\,m^3}}{\mathrm{A^2 s^3}} \tag{1.11}$$

- **Ειδική αγωγιμότητα σ.** Η ειδική αγωγιμότητα σ είναι το αντίστροφο μέγεθος της ειδικής αντίστασης ρ, συνεπώς,

$$1 \text{ μονάδα } \sigma = \frac{1}{\Omega\text{m}} = 1\ \frac{\text{A}}{\text{Vm}} = 1\ \frac{\text{A}^2}{\text{Wm}} = 1\ \frac{\text{A}^2\text{s}^3}{\text{Kg}\,\text{m}^3} \tag{1.12}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Όπως φαίνεται από τις πιο πάνω σχέσεις και ειδικότερα από τις (1.3) και (1.5), οι μονάδες W της ισχύος και J του έργου (ή της ενέργειας) εκφράζονται, συναρτήσει ηλεκτρικών μεγεθών, και από τις σχέσεις

$$1 \text{ W} = 1 \text{ VA} \tag{1.13}$$

και

$$1 \text{ J} = 1 \text{ Ws} = 1 \text{ VAs}, \tag{1.14}$$

που, εκτός από τον χρόνο, περιέχουν μονάδες μόνον ηλεκτρικών μεγεθών.

- **Διηλεκτρική σταθερά ϵ.** Σ' ένα ομογενές, γραμμικό και ισότροπο μέσο η διηλεκτρική μετατόπιση $\boldsymbol{D}$ και η ηλεκτρική πεδιακή ένταση $\boldsymbol{E}$ συνδέονται με τη σχέση $\boldsymbol{D} = \epsilon\boldsymbol{E}$, όπου η σταθερά ϵ εκφράζει τη διηλεκτρική σταθερά του μέσου. Έτσι, με βάση τις (1.6), (1.7) και (1.8) έχουμε

$$1 \text{ μονάδα } \epsilon = 1\ \frac{\text{As}}{\text{Vm}} = 1\ \frac{\text{F}}{\text{m}} = 1\ \frac{\text{A}^2\text{s}^4}{\text{Kg}\,\text{m}^3} \tag{1.15}$$

Η τιμή της διηλεκτρικής σταθεράς στο κενό είναι

$$\epsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{F}}{\text{m}} \simeq \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}\ \frac{\text{F}}{\text{m}} \tag{1.16}$$

- **Μαγνητική ροή Φ.** Όπως θα δούμε αργότερα, η τάση U που αναπτύσσεται εξ επαγωγής στους ακροδέκτες ενός συρμάτινου βρόχου δίνεται, σύμφωνα με τον νόμο του Faraday, από την

$$U = -\frac{d\Phi}{dt}, \tag{1.17}$$

όπου στη διαφορική χρονική μεταβολή dt αντιστοιχεί η διαφορική μεταβολή $d\Phi$ της μαγνητικής ροής Φ που διέρχεται από οποιαδήποτε επιφάνεια που περατώνεται στον βρόχο. Η μονάδα της μαγνητικής ροής ορίζεται από την (1.17) και ονομάζεται Weber (Wb). Με βάση, λοιπόν, τις (1.17) και (1.5) έχουμε

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ Vs} = 1\ \frac{\text{Kg}\,\text{m}^2}{\text{As}^2} \tag{1.18}$$

• **Μαγνητική επαγωγή $\boldsymbol{B}$.** Μονάδα της μαγνητικής επαγωγής είναι το Tesla (T), που ορίζεται ως η μαγνητική επαγωγή ενός ομογενούς μαγνητικού πεδίου που εμφανίζει ροή 1 Wb σε 1 m^2 επιφάνειας, τοποθετημένης κάθετα προς τη διεύθυνση των μαγνητικών γραμμών του πεδίου, δηλαδή

$$1\ \mathrm{T} = 1\ \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}^2} = 1\ \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2} = 1\ \frac{\mathrm{Kg}}{\mathrm{As}^2} \tag{1.19}$$

• **Μαγνητική πεδιακή ένταση $\boldsymbol{H}$.** Η μονάδα της μαγνητικής πεδιακής έντασης μπορεί να οριστεί από την

$$I = \oint_c \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} \tag{1.20}$$

που περιγράφει τον νόμο του Ampère, σύμφωνα με τον οποίο η κυκλοφορία της μαγνητικής πεδιακής έντασης κατά μήκος τυχόντος κλειστού δρόμου c είναι ίση με την ένταση του ρεύματος που εμπλέκει τον δρόμο αυτό. Έχουμε, συνεπώς,

$$1\ \text{μονάδα}\ \boldsymbol{H} = 1\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} \tag{1.21}$$

Η μονάδα της μαγνητικής πεδιακής έντασης μπορεί, επίσης, να οριστεί και ως η ένταση του μαγνητικού πεδίου στον μεταξύ δύο απέραντων παράλληλων επίπεδων ταινιών χώρο, όταν οι ταινίες διαρρέονται από δύο παράλληλα, ίσα και αντίθετα επιφανειακά ρεύματα πυκνότητας 1 A/m.

• **Αυτεπαγωγή $\boldsymbol{L}$.** Μονάδα της αυτεπαγωγής είναι το Henry (H), και ορίζεται ως η αυτεπαγωγή ενός βρόχου που όταν διαρρέεται από ρεύμα έντασης 1 A δημιουργεί σ' αυτό μαγνητική ροή 1 Wb.

$$1\,\mathrm{H} = 1\ \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{A}} = 1\ \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}} = 1\ \frac{\mathrm{Kg\,m}^2}{\mathrm{A}^2\mathrm{s}^2} \tag{1.22}$$

• **Μαγνητική διαπερατότητα $\boldsymbol{\mu}$.** Σ' ένα ομογενές γραμμικό και ισότροπο μέσο η μαγνητική επαγωγή και η μαγνητική πεδιακή ένταση συνδέονται με τη σχέση $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$, όπου μ είναι η μαγνητική διαπερατότητα του μέσου. Η μονάδα της μαγνητικής διαπερατότητας, όπως φαίνεται από τις (1.19), (1.21) και (1.22) είναι, συνεπώς, η

$$1\ \text{μονάδα}\ \mu = 1\ \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{Am}} = 1\ \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} = 1\ \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}} = 1\ \frac{\mathrm{Kg\,m}}{\mathrm{A}^2\mathrm{s}^2} \tag{1.23}$$

Η τιμή της μαγνητικής διαπερατότητας στο κενό είναι

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}} \tag{1.24}$$

Όπως, εύκολα, μπορούμε να δούμε από τις (1.16) και (1.24), η διηλεκτρική σταθερά ϵ_0 και η μαγνητική διαπερατότητα μ_0 του κενού χώρου σχετίζονται με την ταχύτητα $c = 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$ του φωτός στο κενό με τη σχέση

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \tag{1.25}$$

Η (1.25), πέραν από το ότι σχετίζει δύο θεμελιακά μεγέθη του ηλεκτρισμού και μαγνητισμού, αποτελεί, συγχρόνως, μια πρώτη ένδειξη για τον ηλεκτρομαγνητικό χαρακτήρα της φωτεινής ακτινοβολίας.

1.2 Προθέματα φυσικών μεγεθών

Για λόγους συντομίας, στη γραφή των αριθμητικών τιμών των διαφόρων μεγεθών χρησιμοποιούμε δεκαδικά πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια των αντίστοιχων μονάδων. Τα πολλαπλάσια ή υποπολλαπλάσια αυτά δηλώνονται με τη γραφή κατάλληλων προθεμάτων πριν από το σύμβολο της μονάδας. Έτσι, όταν κάποιο πρόθεμα γραφτεί μπροστά από το σύμβολο κάποιας μονάδας, τότε το σύμπλεγμα προθέματος και μονάδας θεωρείται ως νέο σύμβολο.

Στον Πίνακα 1.1 αναγράφονται τα χρησιμοποιούμενα δεκαδικά πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια με τα ονόματα και τον συμβολισμό των αντίστοιχων προθεμάτων, ενώ τα σπανιότερα χρησιμοποιούμενα προθέματα δίνονται σε παρενθέσεις. Κατά τη χρησιμοποίηση προθεμάτων συνιστάται η αποφυγή διπλών προθεμάτων, όταν είναι δυνατή η χρησιμοποίηση ενός μόνον προθέματος.

1.3 Αγωγοί, μονωτικά υλικά, ηλεκτρικές δράσεις

Όπως ήδη αναφέραμε, μια σημαντική διαφορά ανάμεσα στις δράσεις μεταξύ μαζών της μηχανικής και τις δράσεις μεταξύ ηλεκτρικών φορτίων είναι ότι, ενώ οι πρώτες είναι πάντοτε ελκτικές, οι δεύτερες εμφανίζονται άλλοτε ελκτικές και άλλοτε απωστικές. Έτσι, για παράδειγμα, ενώ μια γυάλινη ράβδος μετά από τριβή σε μάλλινο ύφασμα έλκει τεμάχιο θείου που έχει προηγουμένως ‘ηλεκτριστεί’ με τριβή σε δέρμα ζώου, η ίδια ράβδος απωθεί τεμάχιο μίκας που έχει προηγουμένως ηλεκτριστεί με τριβή σε μεταξωτό ύφασμα.

Γενικά, κάθε ηλεκτρισμένο σώμα ανήκει σε μια από τις ακόλουθες δύο κατηγορίες: στην πρώτη κατηγορία ανήκουν τα ηλεκτρισμένα σώματα που συμπεριφέρονται όπως η γυάλινη ράβδος, δηλαδή έλκουν το ηλεκτρισμένο θείο και απωθούν την ηλεκτρισμένη μίκα, ενώ στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν τα ηλεκτρισμένα σώματα που εμφανίζουν αντίθετη συμπεριφορά, δηλαδή έλκουν την ηλεκτρισμένη μίκα και απωθούν το ηλεκτρισμένο θείο. Ας σημειωθεί ότι

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.1: Προθέματα μονάδων

Παράγοντας πολλαπλασιασμού μονάδας	Πρόθεμα	Συμβολισμός
(10^{18})	(exa)	(E)
(10^{15})	(peta)	(P)
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	K
(10^{2})	(hecto)	(h)
(10)	(deka)	(da)
(10^{-1})	(deci)	(d)
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
(10^{-18})	(atto)	(a)

τρίτη κατηγορία δεν υπάρχει, δεν υπάρχουν, δηλαδή ηλεκτρισμένα σώματα που να έλκουν και το θείο και τη μίκα ή να απωθούν και τα δύο.

Οι συστηματικές παρατηρήσεις και η λεπτομερής πειραματική έρευνα των πιο πάνω φαινομένων κατέληξαν στα εξής:

α) Όλα τα ηλεκτρισμένα σώματα της μιας κατηγορίας έλκουν τα ηλεκτρισμένα σώματα της άλλης κατηγορίας, μεταξύ, όμως, των ηλεκτρισμένων σωμάτων της αυτής κατηγορίας ασκούνται μόνον απωστικές δράσεις.

Τα ηλεκτρισμένα σώματα της πρώτης κατηγορίας θεωρούνται — αυθαίρετα και συμβατικά — **θετικά** ηλεκτρισμένα, ενώ τα ηλεκτρισμένα σώματα της δεύτερης κατηγορίας ονομάζονται **αρνητικά** ηλεκτρισμένα.

Εκτός από την τριβή, ηλέκτριση ενός σώματος μπορεί να παρατηρηθεί και όταν τα μόρια του σώματος πλησιάσουν πάρα πολύ τα μόρια ενός άλλου σώματος. Τότε, ηλεκτρόνια αποσπούνται από τις εξωτερικές στιβάδες των ατόμων του ενός σώματος και προσαρτώνται στα γειτονικά άτομα του άλλου σώματος, όπου παραμένουν και μετά την απομάκρυνση των δύο σωμάτων. Τα σώματα στα οποία παρατηρείται έλλειψη ηλεκτρονίων αντιστοιχίζονται στα σώματα της πρώτης κατηγορίας (θετικά ηλεκτρισμένα) ενώ τα σώματα στα οποία παρατηρείται περίσσεια ηλεκτρονίων αντιστοιχίζονται στα σώματα της δεύτερης κατηγορίας (αρνητικά ηλεκτρισμένα).

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ηλέκτριση μπορεί να παρατηρηθεί και όταν δύο διαφορετικά σώματα πιεστούν ισχυρά μεταξύ τους, ή όταν το ένα από αυτά είναι υγρό και περιβάλλει το δεύτερο.

Το πείραμα απέδειξε, επίσης, ότι το μηχανικό έργο που καταβάλλεται για την τριβή ή την πίεση, μετατρέπεται σε θερμότητα ή σε έργο παραμόρφωσης και, επομένως, δεν σχετίζεται άμεσα με το ηλεκτρικό φαινόμενο.

Είναι φανερό ότι, κατά την ηλέκτριση δύο διαφορετικών σωμάτων με τριβή ή πίεση του ενός πάνω στο άλλο, τα δύο σώματα ηλεκτρίζονται ετερώνυμα, δηλαδή το ένα σώμα εμφανίζεται θετικά και το άλλο αρνητικά ηλεκτρισμένο. Έτσι, για παράδειγμα, κατά την τριβή μιας γυάλινης ράβδου με ένα μάλλινο ύφασμα, η ράβδος ηλεκτρίζεται θετικά και το ύφασμα αρνητικά.

Το είδος της ηλέκτρισης κατά την τριβή (ή την ισχυρή πίεση) διαφόρων σωμάτων μπορεί να προσδιοριστεί με τη βοήθεια της ακόλουθης **τριβοηλεκτρικής σειράς του Smith**:

1. Δέρμα κουνελιού (+)
2. Γυαλί
3. Μίκα
4. Μαλλί
5. Δέρμα γάτας
6. Ca - Mg - Pb
7. Μέταξα
8. Al - Mn - Zn
9. Βαμβάκι
10. Ήλεκτρο
11. Ρητίνη
12. Μέταλλα (Cu, Ni, Co, Ag, κλπ.)
13. Καουτσούκ
14. Θείο
15. Μέταλλα (Pt, Au)
16. Κυτταρίνη (−)

Με βάση την παραπάνω τριβοηλεκτρική σειρά, προκύπτει ότι κατά την τριβή δύο σωμάτων ηλεκτρίζεται θετικά εκείνο που έχει τον μικρότερο αύξοντα αριθμό. Θα πρέπει, όμως, να αναφερθεί ότι η πιο πάνω κατάταξη ισχύει μόνον κατά προσέγγιση, γιατί το είδος της ηλέκτρισης εξαρτάται και από άλλους παράγοντες, όπως για παράδειγμα από τη θερμοκρασία, την υγρασία, την προηγούμενη ηλεκτρική κατάσταση των σωμάτων κλπ.

β) Υπάρχουν σώματα, όπως π.χ. τα μέταλλα, στα οποία η ηλέκτριση δεν εντοπίζεται αποκλειστικά στην περιοχή επαφής, όπου αρχικά εκδηλώνεται, αλλά επεκτείνεται, σχεδόν ακαριαία, σ' ολόκληρη την επιφάνειά τους. Επίσης, τα σώματα αυτά είναι δυνατόν να 'απο-ηλεκτριστούν' ακόμα και με απλή επαφή με άλλα μεταλλικά αντικείμενα. Αντίθετα, υπάρχουν σώματα, όπως π.χ. το γυαλί, στα οποία η ηλέκτριση παραμένει εντοπισμένη στην περιοχή όπου αρχικά εκδηλώνεται. Τα σώματα αυτά δεν απο-ηλεκτρίζονται όταν έλθουν σε απλή επαφή με άλλα αντικείμενα. Τα σώματα της πρώτης κατηγορίας ονομάζονται **αγώγιμα σώματα** ή **καλοί αγωγοί** ή απλώς **αγωγοί**, ενώ τα σώματα της δεύτερης κατηγορίας ονομάζονται **κακοί αγωγοί** ή **μονωτικά σώματα** ή απλώς **μονωτήρες**. Βέβαια, στη φύση δεν υπάρχουν, ούτε ιδανικοί αγωγοί, ούτε ιδανικά μονωτικά σώματα, ούτε μπορεί να υπάρξει σαφής διάκριση ανάμεσα στις δύο αυτές κατηγορίες.

γ) Ένα ηλεκτρισμένο σώμα είναι είτε θετικά (έλλειψη ηλεκτρονίων), είτε αρνητικά (περίσσεια ηλεκτρονίων) ηλεκτρισμένο. Άλλο είδος ηλέκτρισης, πέραν από τη θετική και την αρνητική, δεν υπάρχει.

δ) Μεταξύ δύο ηλεκτρισμένων σωμάτων ασκούνται δυνάμεις. Οι δυνάμεις αυτές είναι ελκτικές όταν τα δύο σώματα είναι ετερώνυμα ηλεκτρισμένα, ή απωστικές όταν τα δύο σώματα είναι ομώνυμα ηλεκτρισμένα.

ε) Δυνάμεις δεν ασκούνται μόνο μεταξύ ηλεκτρισμένων σωμάτων αλλά και μεταξύ ενός ηλεκτρισμένου και ενός μη ηλεκτρισμένου σώματος. Οι δυνάμεις που αναπτύσσονται ανάμεσα σε ένα ηλεκτρισμένο και σε ένα αρχικά ουδέτερο σώμα είναι πάντοτε ελκτικές και οφείλονται στην **εξ επαγωγής ηλέκτριση** του αρχικά μη ηλεκτρισμένου σώματος. Πράγματι, τα ηλεκτρόνια του μη ηλεκτρισμένου σώματος μετακινούνται προς το μέρος του ηλεκτρισμένου σώματος αν αυτό είναι θετικά ηλεκτρισμένο ή προς το αντίθετο μέρος αν αυτό είναι αρνητικά ηλεκτρισμένο. Οι μετακινήσεις αυτές είναι πεπερασμένες αν το αρχικά ουδέτερο σώμα είναι καλός αγωγός ή μικροσκοπικές αν αυτό είναι μονωτικό. Και στις δύο, όμως, περιπτώσεις το αρχικά ουδέτερο σώμα παύει να συμπεριφέρεται ως ηλεκτρικά ουδέτερο. Έτσι, επειδή η ελκτική δύναμη που ασκεί το ηλεκτρισμένο σώμα στο πλησιέστερα προς αυτό βρισκόμενο και ετερώνυμα ηλεκτρισμένο τμήμα του άλλου σώματος είναι, σύμφωνα με τον νόμο του Coulomb που εξετάζεται στην επόμενη παράγραφο, μεγαλύτερη από την απωστική δύναμη που ασκεί το ηλεκτρισμένο σώμα στο μακρύτερα προς αυτό ευρισκόμενο και ομώνυμα ηλεκτρισμένο τμήμα του άλλου σώματος, η τελική συνισταμένη των δύο αυτών δυνάμεων είναι πάντοτε ελκτική.

στ) Αν το ηλεκτρισμένο σώμα A ασκεί πάνω στο ηλεκτρισμένο σώμα B τη δύναμη $\boldsymbol{F}_{AB}$, τότε, σύμφωνα με την αρχή της δράσης και αντίδρασης, και το σώμα B ασκεί πάνω στο σώμα A μια δύναμη $\boldsymbol{F}_{BA}$ (ίση και) αντίθετη προς την $\boldsymbol{F}_{AB}$.

1.4 Νόμος του Coulomb

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, τα ηλεκτρισμένα σώματα ασκούν (και υφίστανται) δυνάμεις. Ο ακριβής, όμως, προσδιορισμός των δυνάμεων αυτών, κατά μέτρο και διεύθυνση, δεν είναι πάντοτε εύκολος. Παρά ταύτα, σε αρκετές περιπτώσεις, και υπό ορισμένες προϋποθέσεις, είναι δυνατός ο προσδιορισμός των δυνάμεων αυτών με τη βοήθεια μιας απλής μαθηματικής σχέσης, που είναι γνωστή ως νόμος του Coulomb.

Στην αρχική του διατύπωση, ο νόμος του Coulomb αναφέρεται στη δύναμη που ασκείται μεταξύ δύο ηλεκτρισμένων σωμάτων που βρίσκονται στο κενό ή – κατά πολύ καλή προσέγγιση – στον αέρα. Αργότερα, ο νόμος αυτός γενικεύθηκε, ώστε να συμπεριλάβει και τις δυνάμεις μεταξύ ηλεκτρισμένων σωμάτων που βρίσκονται σε άλλα μονωτικά μέσα.

Οι συνθήκες που πρέπει να πληρούνται για να ισχύει ο νόμος του Coulomb είναι οι εξής:

α) Πρέπει να υπάρχουν δύο μόνο σώματα, ηλεκτρισμένα και τα δύο.

β) Τα δύο ηλεκτρισμένα σώματα πρέπει να έχουν γεωμετρικές διαστάσεις πολύ μικρές σε σχέση προς τη μεταξύ τους απόσταση. Στην περίπτωση αυτή τα δύο ηλεκτρισμένα σώματα εκλαμβάνονται και ως **ηλεκτρισμένα σημεία**.

γ) Ο χώρος μεταξύ των δύο σωμάτων και γύρω από αυτά πρέπει να είναι μονωτικός και ομογενής, και να εκτείνεται, θεωρητικά μεν, μέχρι το άπειρο, πρακτικά δε, σε ακτίνα πολύ μεγαλύτερη από τη μεταξύ των δύο σωμάτων απόσταση.

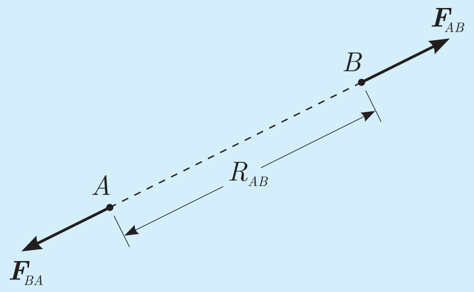
δ) Τα δύο ηλεκτρισμένα σώματα πρέπει να είναι ακίνητα ως προς τον παρατηρητή του πειράματος, ή ακόμα και αν κινούνται, πρέπει οι ταχύτητες τους να είναι πολύ μικρές σε σχέση προς την ταχύτητα του φωτός.

Οι πιο πάνω ειδικές συνθήκες συνοψίζονται στην παρακάτω ενιαία διατύπωση: *"τα εξαγόμενα των πειραμάτων του Coulomb ισχύουν για δύο ακίνητα ηλεκτρισμένα σημεία που βρίσκονται μόνα στον άπειρο κενό χώρο"*. Υπό τις συνθήκες αυτές, ο Coulomb διεπίστωσε τα εξής:

α) Η δύναμη που ασκείται στα δύο ηλεκτρισμένα σημεία έχει τη διεύθυνση της ευθείας που ενώνει τα δύο αυτά σημεία και είναι απωστική μεν αν τα σημεία είναι ομώνυμα ηλεκτρισμένα, ελκτική δε αν είναι ετερώνυμα ηλεκτρισμένα.

β) Το μέτρο της δύναμης μεταβάλλεται αντίστροφα ανάλογα προς το τετράγωνο της απόστασης μεταξύ των δύο ηλεκτρισμένων σημείων.

γ) Έστω ότι αρχικά υφίστανται τα ηλεκτρισμένα σημεία A και B του Σχήματος 1.1. Αν, στη συνέχεια, αντί του B τοποθετηθεί, στην ίδια ακριβώς θέση, ένα άλλο ηλεκτρισμένο σημείο $\varGamma$, τότε το μέτρο της δύναμης που ασκείται στα ηλεκτρισμένα σημεία A και $\varGamma$ είναι διαφορετικό – εν γένει – από το μέτρο της δύναμης που ασκούνταν στα ηλεκτρισμένα σημεία A και B. Επειδή, όμως, εκτός από την αντικατάσταση του B από το $\varGamma$, δεν έχει μεταβληθεί καμιά από τις υπόλοιπες συνθήκες του πειράματος, είναι λογικό να συμπεράνει κανείς ότι το σημείο $\varGamma$ έχει την ιδιότητα του ηλεκτρισμένου σε διαφορετική ένταση από εκείνη που είχε το σημείο B. Αν, λοιπόν, $F_{AB} = F_{BA}$ και $F_{A\varGamma} = F_{\varGamma A}$ είναι τα μέτρα των δυνάμεων στις δύο περιπτώσεις και παρατηρηθεί ότι το μέτρο της δύναμης στη δεύτερη περίπτωση είναι π.χ. n-πλάσιο του μέτρου της δύναμης στην πρώτη περίπτωση, είναι εύλογο να υποθέσει κανείς ότι το σημείο $\varGamma$ έχει την ιδιότητα του ηλεκτρισμένου σε n-πλάσια ένταση από το B.



Σχημα 1.1: Δυνάμεις Coulomb.

Αν συνεχιστεί το πείραμα και τοποθετηθεί, αντί του A, στην ίδια ακριβώς με αυτό θέση, ένα τέταρτο ηλεκτρισμένο σημείο $\varDelta$, θα παρατηρηθεί ότι και το μέτρο $F_{\varGamma\varDelta} = F_{\varDelta\varGamma}$ της δύναμης μεταξύ των ηλεκτρισμένων σημείων $\varGamma$ και $\varDelta$ είναι, εν γένει, διαφορετικό από το μέτρο $F_{A\varGamma} = F_{\varGamma A}$ της δύναμης μεταξύ των σημείων A και $\varGamma$. Συμπεραίνεται, συνεπώς, και πάλι ότι τα ηλεκτρισμένα σημεία A και $\varDelta$ έχουν την ιδιότητα του ηλεκτρισμένου σε διαφορετική ένταση.

Όταν κατά την αντικατάσταση του σημείου B από το $\varGamma$ (ή του A από το $\varDelta$) δεν παρατηρείται απλώς μεταβολή στο μέτρο της δύναμης αλλά και αλλαγή της φοράς της, τότε τα ηλεκτρισμένα σημεία B και $\varGamma$ (ή A και $\varDelta$) δεν έχουν μόνον την ιδιότητα του ηλεκτρισμένου σε διαφορετική ένταση, αλλά και ανήκουν σε διαφορετικές κατηγορίες ηλεκτρισμένων σωμάτων, δηλαδή είναι ετερώνυμα ηλεκτρισμένα.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι η δύναμη που ασκείται μεταξύ δύο ηλεκτρισμένων σημείων δεν εξαρτάται μόνον από τη μεταξύ τους απόσταση, αλλά και από δύο άλλους, ομοειδείς προφανώς παράγοντες, ένα για κάθε σημείο, που εκφράζουν την ένταση στην οποία έχει την ιδιότητα του ηλεκτρισμένου το κάθε σημείο.

Ο παράγοντας αυτός περιγράφεται με τον όρο **ηλεκτρικό φορτίο** (ή **ποσότητα ηλεκτρισμού**).

Τα ηλεκτρικά φορτία, τα οποία, συνήθως, παριστούμε με τα σύμβολα Q ή q, όταν αναφέρονται σε ηλεκτρισμένα σημεία ονομάζονται **σημειακά** (ή **κεντρικά**) ηλεκτρικά φορτία.

Αν ως μονάδα των ηλεκτρικών φορτίων εκλεγεί το φορτίο ενός ηλεκτρισμένου σημείου, π.χ. του ηλεκτρισμένου σημείου A, τότε για τον καθορισμό του ηλεκτρικού φορτίου ενός τυχόντος ηλεκτρισμένου σημείου, π.χ. του B, μπορούμε να κάνουμε τις εξής δύο μετρήσεις:

Μετρούμε αρχικά το μέτρο $F_{A\Gamma}$ της δύναμης που ασκείται μεταξύ του ηλεκτρισμένου σημείου A και ενός τυχόντος ηλεκτρισμένου σημείου Γ. Τα σημεία A και Γ βρίσκονται σε δύο τυχούσες θέσεις του άπειρου κενού χώρου. Στη συνέχεια, και χωρίς καμιά άλλη αλλαγή στις συνθήκες του πειράματος, αντικαθιστούμε το σημείο A με το ηλεκτρισμένο σημείο B και μετρούμε τη δύναμη $F_{B\Gamma}$ μεταξύ των σημείων B και Γ. Αν το μέτρο $F_{B\Gamma}$ βρεθεί q-πλάσιο του μέτρου $F_{A\Gamma}$, είναι προφανές ότι το ηλεκτρικό φορτίο του σημείου B είναι ίσο προς το q-πλάσιο του φορτίου του σημείου A που εκλέχτηκε ίσο προς τη μονάδα, δηλαδή είναι ίσο προς q μονάδες. Όταν οι δυνάμεις $F_{A\Gamma}$ και $F_{B\Gamma}$ είναι ομόρροπες, η αλγεβρική τιμή του φορτίου του σημείου B είναι $+q$, ενώ στην περίπτωση που οι δυνάμεις $F_{A\Gamma}$ και $F_{B\Gamma}$ είναι αντίρροπες, η αλγεβρική του τιμή είναι $-q$. Αν ως μονάδα μέτρησης των ηλεκτρικών φορτίων ληφθεί το φορτίο ενός θετικά ηλεκτρισμένου σημείου, τότε τα φορτία όλων των θετικά ηλεκτρισμένων σημείων εκφράζονται με θετικούς αριθμούς (*θετικά φορτία*) ενώ όλα τα φορτία των αρνητικά ηλεκτρισμένων εκφράζονται με αρνητικούς αριθμούς (*αρνητικά φορτία*). Προφανώς, και με βάση όσα αναφέρθηκαν σε προηγούμενες παραγράφους, το ηλεκτρικό φορτίο ενός σώματος ισούται με το γινόμενο του ‘κβαντισμένου’ φορτίου $\pm e$ επί την έλλειψη (αν είναι θετικό) ή την περίσσεια (αν είναι αρνητικό) των ηλεκτρονίων του σώματος.

Αν το ηλεκτρισμένο σημείο Γ, στις πιο πάνω δύο μετρήσεις, αντικατασταθεί από ένα οποιοδήποτε άλλο ηλεκτρισμένο σημείο με διαφορετικό φορτίο, θα μετρηθεί και πάλι η ίδια τιμή q του φορτίου του ηλεκτρισμένου σημείου B. Αυτό εκφράζει ότι η τιμή του φορτίου κάθε ηλεκτρισμένου σημείου είναι ανεξάρτητη της τιμής του ηλεκτρικού φορτίου άλλων ηλεκτρισμένων σημείων με τα οποία αλληλεπενεργεί.

Τελικά, το πείραμα δείχνει ότι η δύναμη με την οποία αλληλεπενεργούν δύο ηλεκτρισμένα σημεία είναι ανάλογη προς το γινόμενο των ηλεκτρικών φορτίων των δύο σημείων.

Οι πιο πάνω πειραματικές διαπιστώσεις μπορούν να συνοψιστούν στη σχέση

$$F_{AB} = F_{BA} = k\frac{|q_A q_B|}{R_{AB}^2}, \tag{1.26}$$

όπου $F_{AB} = F_{BA}$ είναι το μέτρο της δύναμης που ασκείται στα δύο ηλεκτρισμένα σημεία B και A, R_{AB} είναι η μεταξύ των σημείων A και B απόσταση και q_A, q_B είναι τα ηλεκτρικά φορτία των σημείων A και B, αντίστοιχα. Ο συντελεστής k δεν εμφανίζεται μόνον ως σταθερά που εξαρτάται από το χρησιμοποιούμενο σύστημα μονάδων, αλλά και ως χαρακτηριστική σταθερά του μέσου μέσα στο οποίο βρίσκονται τα δύο φορτία.

Η (1.26) είναι γνωστή ως **νόμος του Coulomb**. Η μαθηματική έκφραση του νόμου του Coulomb μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τον ορισμό της μονάδας του ηλεκτρικού φορτίου. Αν η δύναμη και η απόσταση μετρηθούν με τις αντίστοιχες μονάδες του συστήματος CGS (δηλαδή σε dyn και cm, αντίστοιχα), και αν ο συντελεστής k θεωρηθεί για το κενό αδιάστατο μέγεθος και ίσο προς τη μονάδα, τότε από την (1.26) ορίζεται η μονάδα του ηλεκτρικού φορτίου στο CGS. Έτσι, ως μονάδα στο σύστημα αυτό επιλέγεται το Franklin (Fr), που ορίζεται ως το ηλεκτρικό φορτίο το οποίο εξασκεί, στο κενό και σε απόσταση $1\,\mathrm{cm}$, πάνω σ' ένα ίσο φορτίο δύναμη 1 δύνης (dyn). Όπως, όμως, δηλώθηκε σε προηγούμενη παράγραφο, στο παρόν βιβλίο χρησιμοποιείται αποκλειστικά το κανονικοποιημένο σύστημα MKSA, αφού η χρήση του συστήματος CGS εμφανίζεται σήμερα πολύ περιορισμένη.

Στο σύστημα MKSA, η τιμή k_0 της σταθεράς k στο κενό έχει την τιμή

$$k_0 = 8{,}987 \cdot 10^9\ \frac{\mathrm{Vm}}{\mathrm{As}} \approx 9 \cdot 10^9\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{F}} \tag{1.27}$$

Η μονάδα, συνεπώς, Coulomb (C) του φορτίου – πέραν από τον ορισμό που δόθηκε στην παράγραφο 1.1 – μπορεί να οριστεί και ως το ηλεκτρικό φορτίο που ασκεί, στο κενό και σε απόσταση $1\,\mathrm{m}$, πάνω σ' ένα ίσο φορτίο δύναμη ίση προς $8{,}987 \cdot 10^9\,\mathrm{N}$.

Όπως ήδη αναφέρθηκε, η k δεν πρέπει να θεωρείται ως μια απλή σταθερά αναλογίας, αλλά ως ένας παράγοντας που, πέραν της αντιστοίχισής του στο χρησιμοποιούμενο σύστημα μονάδων, αντιπροσωπεύει και τις φυσικές ιδιότητες του μέσου που σχετίζονται με τη συμπεριφορά του κατά τη μετάδοση ηλεκτρικών δράσεων.

Για το κενό, στο οποίο ως γνωστόν αναφέρονται οι σχετικές πειραματικές εργασίες του Coulomb, η σταθερά k_0 στο σύστημα MKSA αντικαθίσταται από τον συντελεστή $k_0 = 1/(4\pi\epsilon_0)$, οπότε η (1.26) γράφεται

$$F_{AB} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_A q_B|}{R_{AB}^2}. \tag{1.28}$$

Η σταθερά ϵ_0 ονομάζεται **διηλεκτρική σταθερά** (dielectric constant), ή **ηλεκτρική διαπερατότητα**, ή **επιτρεπότητα** (permittivity) του κενού χώρου, έχει δε – στο σύστημα MKSA – μονάδα το farad/meter $(\mathrm{F/m})$ και τιμή

$$\boxed{\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k_0} = 8,854 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} \simeq \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}\ \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}} \tag{1.29}$$

Η σκοπιμότητα εισαγωγής του παράγοντα 4π, που καθιστά αναμφίβολα τη διατύπωση (1.28) του νόμου του Coulomb περισσότερο πολύπλοκη από την αρχική διατύπωση (1.26) του ίδιου νόμου, δικαιολογείται από το γεγονός ότι, με τον τρόπο αυτό, άλλες γενικότερες και περισσότερο χρησιμοποιούμενες σχέσεις του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (όπως για παράδειγμα οι εξισώσεις Maxwell) αποκτούν απλούστερη μορφή, αφού απαλλάσσονται από τον παράγοντα 4π που αναγκαστικά θα εμφανίζονταν σ' αυτές αν δεν υπήρχε στον παρονομαστή της (1.29).

Στην περίπτωση όπου δύο ακίνητα σημειακά φορτία βρίσκονται μόνα, όχι στο κενό, αλλά μέσα σ' ένα ομογενές και ισότροπο μονωτικό μέσο που εκτείνεται στο άπειρο, τα φορτία αλληλεπενεργούν και πάλι με τον τρόπο που περιγράφει ο νόμος του Coulomb. Το μέτρο, όμως, της δύναμης με την οποία αλληλεπενεργούν τα φορτία δεν είναι ίσο με το μέτρο της δύναμης που θα ασκούνταν στα δύο φορτία αν αυτά βρίσκονταν στο κενό ή τον ατμοσφαιρικό αέρα. Αυτό σημαίνει ότι η διηλεκτρική σταθερά ϵ του μονωτικού μέσου δεν είναι ίση με τη διηλεκτρική σταθερά ϵ_0 του κενού χώρου.

Αν, λοιπόν, ϵ είναι η διηλεκτρική σταθερά ενός τυχόντος μονωτικού μέσου, η μαθηματική διατύπωση του νόμου του Coulomb σ' αυτό είναι η

$$\boxed{F_{AB} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{|q_A q_B|}{R_{AB}^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0}\frac{|q_A q_B|}{R_{AB}^2}} \tag{1.30}$$

όπου

$$\boxed{\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}} \tag{1.31}$$

είναι μια – αδιάστατη – χαρακτηριστική σταθερά του κάθε μέσου, ανεξάρτητη από το χρησιμοποιούμενο σύστημα μονάδων. Η σταθερά αυτή ονομάζεται **σχετική διηλεκτρική σταθερά** (relative permittivity) ή **σχετική επιτρεπτότητα** του μέσου.

Η σχετική διηλεκτρική σταθερά του αέρα για κανονικές συνθήκες θερμοκρασίας και πίεσης είναι μόλις μεγαλύτερη της μονάδας, στις περισσότερες, όμως, πρακτικές εφαρμογές λαμβάνεται ίση προς τη μονάδα. Στον Πίνακα 1.2 σημειώνονται οι τιμές της σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς διαφόρων μέσων. Οι, ούτως ή άλλως, ενδεικτικές τιμές του πίνακα αυτού μπορούν να διαφοροποιηθούν ριζικά όταν τα μεγέθη του πεδίου υπόκεινται σε ταχύτατες χρονικές μεταβολές (μικροκυματικές-οπτικές συχνότητες).

Η (1.30) μπορεί να γραφεί και κατά τέτοιο τρόπο ώστε να δίνει όχι μόνον το μέτρο αλλά και την κατεύθυνση (διεύθυνση και φορά) της δύναμης που ασκείται στα δύο φορτία. Έτσι, αν $\boldsymbol{F}_{AB}$ είναι η δύναμη που ασκείται από το φορτίο q_A

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.2: Τιμές σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς

Διηλεκτρικό μέσο	Ενδεικτικές τιμές
Κενό	1
Αέρας	1,0006
Teflon	2,1
Παραφίνη	2,1
Χαρτί	2 – 4
Λάδι	2,3
Πολυαιθυλένιο	2,3
Ελαστικό	2,5 – 3
Έδαφος (αμμώδες ξηρό)	3,2
Πλεξιγκλάς	3,4
Γυαλί	5 – 10
Χαλαζίας	5
Βακελίτης	4,4 – 5,4
Πορσελάνη	5,1 – 6
Ξύλο	1,5 – 6
Μίκα	5,4 – 6
Νερό αποσταγμένο	80

στο φορτίο q_B, $\boldsymbol{R}_{AB}$ είναι η διανυσματική απόσταση των δύο φορτίων με φορά από το q_A προς το q_B, και ϵ η διηλεκτρική σταθερά του μέσου, η 'διανυσματική' διατύπωση του νόμου του Coulomb είναι η

$$\boxed{\boldsymbol{F}_{AB} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q_A q_B}{R_{AB}^3}\boldsymbol{R}_{AB}} \tag{1.32}$$

όπου τα φορτία q_A και q_B νοούνται με το αλγεβρικό τους πρόσημο.

Η (1.32), αν $\hat{\boldsymbol{e}}_{AB} = \boldsymbol{R}_{AB}/R_{AB}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα με φορά από το q_A προς το q_B, γράφεται, επίσης, και με τη μορφή

$$\boldsymbol{F}_{AB} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q_A q_B}{R_{AB}^2}\hat{\boldsymbol{e}}_{AB}. \tag{1.33}$$

Είναι φανερό ότι η δύναμη $\boldsymbol{F}_{BA}$ που ασκεί το φορτίο q_B πάνω στο φορτίο q_A είναι (ίση και) αντίθετη προς τη δύναμη $\boldsymbol{F}_{AB}$ ($\boldsymbol{F}_{AB} = -\boldsymbol{F}_{BA}$).

Δύο, ακόμη, παρατηρήσεις που προκύπτουν από τα προηγούμενα και αξίζει ν' αναφερθούν είναι οι εξής:

α) Επειδή η τιμή της διηλεκτρικής σταθεράς ενός μέσου δεν επηρεάζεται από την παρουσία ή μη ηλεκτρικών φορτίων, από τη μαθηματική διατύπωση του νόμου του Coulomb προκύπτει ότι είναι δυνατή η εφαρμογή της γενικής αρχής της *υπέρθεσης (επαλληλίας)* των δυνάμεων που ασκούν τα διάφορα φορτία.

β) Η τιμή ενός φορτίου ίσου προς τη μονάδα, δηλαδή 1 C, είναι εξαιρετικά μεγάλη. Πράγματι, αν λάβουμε υπόψη ότι το φορτίο του ηλεκτρονίου (αρνητικό) ή του πρωτονίου (θετικό) είναι ίσο προς $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, τότε ένα αρνητικό φορτίο 1 C θα αντιπροσώπευε έναν αριθμό $6 \cdot 10^{18}$ περίπου ηλεκτρονίων. Εξάλλου, από τον νόμο του Coulomb προκύπτει ότι η δύναμη με την οποία θα αλληλεπενεργούσαν δύο ίσα φορτία 1 C, που θα βρίσκονταν σε απόσταση 1 m στον αέρα, θα έφθανε την απίστευτη τιμή των $9 \cdot 10^{9}$ N, θα ήταν δηλαδή ίση προς εννιακόσιες χιλιάδες τόνους περίπου. Η πιο πάνω επισήμανση δικαιολογεί το γεγονός της συστηματικής χρησιμοποίησης υποπολλαπλάσιων της μονάδας φορτίου στα πρακτικά προβλήματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1

Να διερευνηθεί η ποσοτική-συγκριτική σχέση μεταξύ των ηλεκτρικών δυνάμεων και των δυνάμεων της παγκόσμιας έλξης της μηχανικής.

Ας θεωρήσουμε ότι δύο υλικά σώματα 1 και 2 με μάζες m_1, m_2 και φορτία Q_1, Q_2, αντίστοιχα, βρίσκονται μόνα στον άπειρο κενό χώρο. Σύμφωνα με τον νόμο της έλξης των μαζών, το μέτρο F_m της ελκτικής δύναμης μεταξύ των δύο μαζών δίνεται από την

$$F_m = G\frac{m_1 m_2}{R_{12}^2}, \tag{i}$$

όπου $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/Kg^2}$ είναι η σταθερά της παγκόσμιας έλξης, και R_{12}^2 είναι η μεταξύ των δύο σωμάτων απόσταση. Πέραν της δυνάμεως αυτής, επειδή τα σώματα είναι ηλεκτρικά φορτισμένα, ασκείται και η δύναμη Coulomb που, για ομόσημα φορτία, έχει μέτρο

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{R_{12}^2}. \tag{ii}$$

Για μια συγκριτική διερεύνηση των δύο αυτών δυνάμεων, θεωρούμε τον λόγο τους λ,

$$\lambda = \frac{F_m}{F_e} = 4\pi\epsilon_0 G\frac{m_1 m_2}{Q_1 Q_2} \tag{iii}$$

ο οποίος είναι ανεξάρτητος της απόστασης των δύο σωμάτων.

Για να καταστεί ακόμα σαφέστερη η πιο πάνω συγκριτική διερεύνηση, ας υποθέσουμε ότι τα δύο σώματα είναι δύο ίσες μεταλλικές σφαίρες ακτίνας R και πυκνότητας μάζας d. Αν, επιπλέον, θεωρηθεί ότι οι δύο σφαίρες είναι ομοιόμορφα φορτισμένες με το ίδιο συνολικό φορτίο Q και την ίδια επιφανειακή πυκνότητα φορτίου ρ_s, τότε η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$\lambda = \frac{F_m}{F_e} = 4\pi\epsilon_0 G \frac{\left(4\pi R^3 d/3\right)^2}{\left(4\pi R^2 \rho_s\right)^2} = \frac{4\pi\epsilon_0 G}{9}\frac{d^2 R^2}{\rho_s^2}, \qquad \text{(iv)}$$

και εκφράζει ότι ο λόγος λ μεταβάλλεται ανάλογα προς το τετράγωνο της ακτίνας των δύο σφαιρών.

Εξειδικεύοντας, περισσότερο, το παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι η πυκνότητα d του υλικού των δύο σωμάτων είναι $d = 8 \cdot 10^3\ \mathrm{Kg/m^3}$, και η τιμή της πυκνότητας των επιφανειακά διανεμημένων φορτίων είναι $\rho_s = 25 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C/m^2}$ (βρίσκεται, δηλαδή κοντά στο όριο της διηλεκτρικής αντοχής του περιβάλλοντος χώρου πριν τη διάσπασή του και την εκδήλωση της ηλεκτρικής εκκένωσης των φορτίων).

Με αντικατάσταση των αριθμητικών αυτών τιμών στην (iv), προκύπτει η ακόλουθη έκφραση του λόγου λ των δύο δυνάμεων

$$\lambda = \frac{4 \cdot \pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}}{9}\frac{\left(8 \cdot 10^3\right)^2 R^2}{\left(25 \cdot 10^{-6}\right)^2} = \frac{R^2}{11843}$$

ή

$$\lambda \simeq (R/109)^2, \qquad \text{(v)}$$

όπου η ακτίνα R μετράται, φυσικά, σε μέτρα.

Από τη σχέση αυτή παρατηρούμε ότι, για $R \gg 109$ m, οι μηχανικές δυνάμεις είναι πολύ μεγαλύτερες από τις ηλεκτρικές δυνάμεις που οφείλονται σε τυχόν φορτία που είναι διανεμημένα σ’ αυτά· π.χ. για δύο ουράνια σώματα με ακτίνα $R = 6.400$ Km, ίση περίπου με την ακτίνα της γης, η τιμή της μηχανικής δύναμης θα ήταν $3{,}46 \cdot 10^9$ περίπου φορές μεγαλύτερη από την ηλεκτρική δύναμη. Αντίθετα, σε φορτισμένα σώματα με διαστάσεις πολύ μικρότερες από την ‘οριακή’ τιμή $R_c = 109$ m, οι μηχανικές δυνάμεις είναι πολύ μικρότερες από τις ηλεκτρικές· π.χ. στην περίπτωση δύο φορτισμένων σφαιρών ακτίνων $R = 1$ cm, οι ηλεκτρικές δυνάμεις θα ήταν $1{,}18 \cdot 10^8$ περίπου φορές μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες μηχανικές δυνάμεις.

1.5 Δυνάμεις σε σύστημα πολλών σημειακών φορτίων

Όπως ήδη διευκρινίσθηκε, ο νόμος του Coulomb επιτρέπει τον υπολογισμό των δυνάμεων με τις οποίες αλληλεπενεργούν δύο σημειακά φορτία που βρίσκονται μόνα σ’ ένα άπειρο, ομογενές και ισότροπο μονωτικό μέσο.

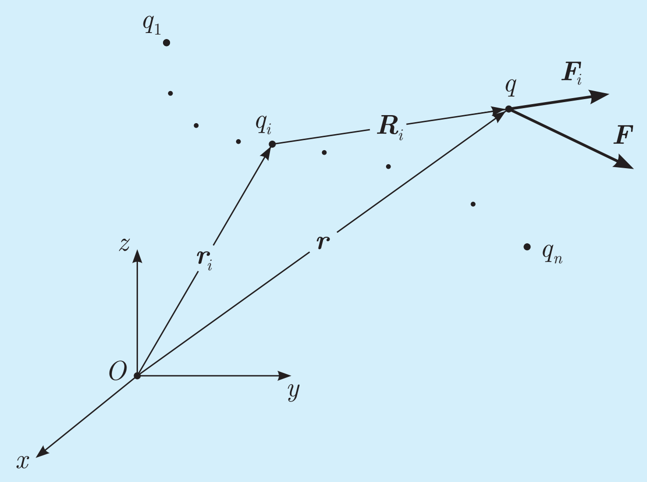
Και στην περίπτωση, όμως, παρουσίας σ’ ένα τέτοιο μέσο περισσότερων σημειακών φορτίων, είναι δυνατός ο υπολογισμός της δύναμης που ασκείται σε κάθε φορτίο, με βάση τον νόμο του Coulomb και τη γενική αρχή της υπέρθεσης.

Έστω, λοιπόν, ότι σ' ένα ομογενές και ισότροπο μέσο βρίσκονται μόνα και ακίνητα τα σημειακά φορτία $q, q_1, q_2, \ldots, q_n$, στις θέσεις που προσδιορίζονται από τα διανύσματα $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n$, αντίστοιχα (Σχήμα 1.2).

Αν $\boldsymbol{F}$ είναι η συνολική δύναμη που ασκείται στο φορτίο q από το σύστημα των υπόλοιπων φορτίων και $\boldsymbol{F}_i$ είναι η δύναμη που ασκεί το σημειακό φορτίο q_i στο σημειακό φορτίο q, τότε, σύμφωνα με τα παραπάνω και την (1.32) έχουμε

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \frac{q}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{R_i^3} \boldsymbol{R}_i} \tag{1.34}$$

όπου $\boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i$ είναι η διανυσματική απόσταση των φορτίων q_i και q με φορά από το φορτίο q_i προς το φορτίο q.



ΣΧΗΜΑ 1.2: Πεδίο πολλών σημειακών φορτίων.

Αν x_i, y_i, z_i είναι οι συντεταγμένες της θέσης του τυχόντος σημειακού φορτίου q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ σ' ένα σύστημα ορθογώνιων καρτεσιανών συντεταγμένων και x, y, z είναι οι συντεταγμένες της θέσης του ηλεκτρικού φορτίου q, τότε η (1.34), επειδή ισχύουν οι

$$\boldsymbol{r}_i = x_i\hat{\boldsymbol{x}} + y_i\hat{\boldsymbol{y}} + z_i\hat{\boldsymbol{z}}, \tag{1.35}$$

$$\boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i = (x - x_i)\hat{\boldsymbol{x}} + (y - y_i)\hat{\boldsymbol{y}} + (z - z_i)\hat{\boldsymbol{z}}, \tag{1.36}$$

$$R_i = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i| = \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2\right]^{1/2}, \tag{1.37}$$

όπου $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα κατά τους άξονες x, y, z, αντίστοιχα, γράφεται

$$\boldsymbol{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i\left[(x - x_i)\hat{\boldsymbol{x}} + (y - y_i)\hat{\boldsymbol{y}} + (z - z_i)\hat{\boldsymbol{z}}\right]}{\left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2\right]^{3/2}}. \tag{1.38}$$

Από την (1.38) προκύπτουν, εύκολα, οι τρεις συνιστώσες F_x, F_y, F_z της δύναμης κατά τις διευθύνσεις των αξόνων x, y, z, αντίστοιχα. Έτσι, η συνιστώσα F_x, για παράδειγμα, δίνεται από τη σχέση

$$F_x = \frac{q}{4\pi\epsilon}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i(x - x_i)}{\left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2\right]^{3/2}}, \tag{1.39}$$

ενώ ανάλογες είναι και οι εκφράσεις των συνιστωσών F_y και F_z.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2

Τα σημειακά φορτία $q_1 = -1$ μC και $q_2 = 4$ μC είναι τοποθετημένα στα σημεία με συντεταγμένες $(2, 1, -4)$ και $(3, -2, 4)$, αντίστοιχα, σ' ένα μέσο με σχετική διηλεκτρική σταθερά $\epsilon_r = 2$. Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκούν τα δύο αυτά φορτία σ'ένα τρίτο σημειακό φορτίο $q_3 = 2$ nC, τοποθετημένο στο σημείο $(1, 2, 1)$ του ίδιου μέσου.

Η ζητούμενη δύναμη, που υπολογίζεται από την αντικατάσταση των δεδομένων του παραδείγματος στην (1.38), είναι

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \frac{q_3}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0}\sum_{i=1}^{2}\frac{q_i\left[(x - x_i)\hat{\boldsymbol{x}} + (y - y_i)\hat{\boldsymbol{y}} + (z - z_i)\hat{\boldsymbol{z}}\right]}{\left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2\right]^{3/2}} \\
&= \frac{2 \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot 2 \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi}}\left\{\frac{-1 \cdot 10^{-6}\left[(1 - 2)\hat{\boldsymbol{x}} + (2 - 1)\hat{\boldsymbol{y}} + (1 + 4)\hat{\boldsymbol{z}}\right]}{\left[(1 - 2)^2 + (2 - 1)^2 + (1 + 4)^2\right]^{3/2}}\right. \\
&\qquad\left. + \frac{4 \cdot 10^{-6}\left[(1 - 3)\hat{\boldsymbol{x}} + (2 + 2)\hat{\boldsymbol{y}} + (1 - 4)\hat{\boldsymbol{z}}\right]}{\left[(1 - 3)^2 + (2 + 2)^2 + (1 - 4)^2\right]^{3/2}}\right\} \\
&= 9 \cdot 10^{-6}\left\{\frac{-(-\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}} + 5\hat{\boldsymbol{z}})}{\left[(-1)^2 + 1^2 + 5^2\right]^{3/2}} + \frac{4(-2\hat{\boldsymbol{x}} + 4\hat{\boldsymbol{y}} - 3\hat{\boldsymbol{z}})}{\left[(-2)^2 + 4^2 + (-3)^2\right]^{3/2}}\right\} \\
&= 9 \cdot 10^{-6}\left(\frac{\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{y}} - 5\hat{\boldsymbol{z}}}{27^{3/2}} + \frac{-8\hat{\boldsymbol{x}} + 16\hat{\boldsymbol{y}} - 12\hat{\boldsymbol{z}}}{29^{3/2}}\right\} \\
&= (-0{,}397\hat{\boldsymbol{x}} + 0{,}858\hat{\boldsymbol{y}} - 1{,}012\hat{\boldsymbol{z}})\ \mu\text{N}.
\end{aligned}$$

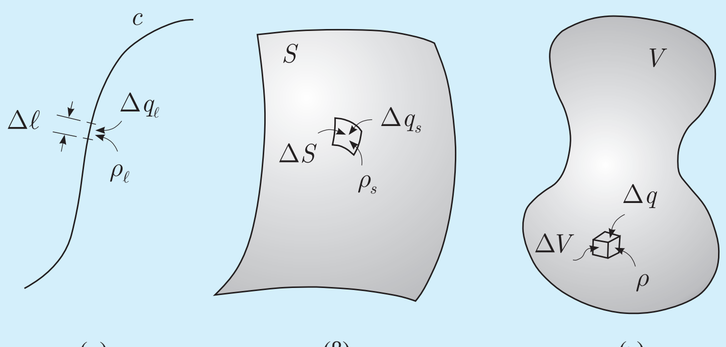
1.6 Διανεμημένα ηλεκτρικά φορτία

Η ανάλυση που προηγήθηκε περιορίσθηκε, ουσιαστικά, στη μελέτη των δράσεων μεταξύ σημειακών φορτίων. Ηλεκτρικές, όμως, δράσεις δεν παρατηρούνται μόνο μεταξύ σημειακών φορτίων, αλλά και μεταξύ ηλεκτρισμένων σωμάτων πεπερασμένων διαστάσεων, που, όπως είναι φυσικό, δεν μπορούν να θεωρηθούν ως σημειακά φορτία. Ανάλογα με τη μορφή του γεωμετρικού φορέα στον οποίο είναι **διανεμημένα** τα ηλεκτρικά φορτία, διακρίνουμε τις εξής τρεις κατηγορίες:

α) Γραμμικά διανεμημένα ηλεκτρικά φορτία. Τα φορτία αυτά διανέμονται σε σώματα, που η γεωμετρική τους μορφή είναι τέτοια, ώστε οι δύο διαστάσεις τους να μπορούν να θεωρηθούν απειροελάχιστες ως προς την τρίτη. Επειδή η μορφή αυτών των σωμάτων έχει την εικόνα *"λεπτής γραμμής"*, τα φορτία που είναι διανεμημένα σ' αυτά ονομάζονται γραμμικά (διανεμημένα) φορτία (Σχήμα 1.3(α)). Αν Δq_ℓ είναι το ηλεκτρικό φορτίο που αντιστοιχεί στο μικρό μήκος $\Delta\ell$, σε κάποια θέση της γραμμής, η **γραμμική πυκνότητα** ρ_ℓ του φορτίου της γραμμής, σ' αυτή τη θέση, ορίζεται από την

$$\rho_\ell = \lim_{\Delta\ell \to 0} \frac{\Delta q_\ell}{\Delta\ell}. \tag{1.40}$$

Το απειροστό φορτίο $dq_\ell = \rho_\ell d\ell$ της γραμμής μπορεί, φυσικά, να θεωρηθεί ως σημειακό φορτίο τοποθετημένο στη θέση του στοιχειώδους τμήματος $d\ell$.



Σχημα 1.3: Διανεμημένα ηλεκτρικά φορτία: α) γραμμικά, β) επιφανειακά, γ) χωρικά.

Όπως φαίνεται από την (1.40), μονάδα μέτρησης της γραμμικής πυκνότητας στο MKSA είναι το $1\ \mathrm{C/m}$. Αν η γραμμική πυκνότητα είναι γνωστή συνάρτηση της θέσης πάνω στη γραμμή, τότε το συνολικό φορτίο q_ℓ της γραμμής δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$q_\ell = \int_c dq_\ell = \int_c \rho_\ell d\ell. \tag{1.41}$$

Επίσης, αν ℓ είναι το μήκος της γραμμής, η **μέση** γραμμική πυκνότητα $\bar{\rho}_\ell$ της γραμμής ορίζεται από τον λόγο

$$\bar{\rho}_\ell = \frac{q_\ell}{\ell} = \frac{\displaystyle\int_c \rho_\ell d\ell}{\ell}. \tag{1.42}$$

Όταν η πυκνότητα ρ_ℓ είναι σταθερή σε κάθε σημείο της γραμμής (και ίση προφανώς προς τη μέση πυκνότητα $\bar{\rho}_\ell$), η διανομή του φορτίου ονομάζεται **ομοιόμορφη** και η γραμμή **ομοιόμορφα** ηλεκτρισμένη.

β) Επιφανειακά διανεμημένα ηλεκτρικά φορτία. Τα φορτία αυτά διανέμονται σε σώματα στα οποία η μία μόνο διάσταση είναι πάρα πολύ μικρή, ενώ οι άλλες δύο διαστάσεις είναι πεπερασμένες. Η μορφή αυτών των σωμάτων έχει την εικόνα μιας πολύ *"λεπτής επιφάνειας"*, γι' αυτό τα φορτία που είναι διανεμημένα σ' αυτά ονομάζονται επιφανειακά (διανεμημένα) φορτία (Σχήμα 1.3(β)).

Αν στο πολύ μικρό κομμάτι ΔS της επιφάνειας S βρίσκεται διανεμημένο το ηλεκτρικό φορτίο Δq_s, η **επιφανειακή πυκνότητα** ρ_s του φορτίου, στη θέση αυτή, ορίζεται ως

$$\rho_s = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q_s}{\Delta S}. \tag{1.43}$$

Όπως το απειροστό φορτίο dq_ℓ έτσι και το απειροστό φορτίο $dq_s = \rho_s dS$, συμπεριφέρεται ως σημειακό φορτίο τοποθετημένο στη θέση του στοιχείου dS.

Η επιφανειακή πυκνότητα ρ_s είναι, εν γένει, συνάρτηση της θέσης πάνω στην επιφάνεια S και έχει ως μονάδα μέτρησης το $1\,\mathrm{C/m^2}$.

Το συνολικό φορτίο q_s, το διανεμημένο σ' ολόκληρη την επιφάνεια S, όταν είναι γνωστή η πυκνότητα ρ_s, δίνεται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$q_s = \int_S dq_s = \int_S \rho_s \, dS. \tag{1.44}$$

Αν S είναι το εμβαδόν της επιφάνειας πάνω στην οποία είναι διανεμημένο το φορτίο q_s, η **μέση** επιφανειακή πυκνότητα $\bar{\rho}_s$ ορίζεται από την

$$\bar{\rho}_s = \frac{q_s}{S} = \frac{\displaystyle\int_S \rho_s \, dS}{S}. \tag{1.45}$$

Μια επιφάνεια θεωρείται **ομοιόμορφα** ηλεκτρισμένη (και η επιφανειακή διανομή ομοιόμορφη), όταν η επιφανειακή πυκνότητα ρ_s είναι σταθερή (και ίση προς την $\bar{\rho}_s$) σε κάθε σημείο της επιφάνειας S.

γ) Χωρικά διανεμημένα ηλεκτρικά φορτία. Τα φορτία αυτά διανέμονται σε σώματα που και οι τρεις τους διαστάσεις είναι πεπερασμένες (Σχήμα 1.3(γ)).

Αν Δq_v είναι το φορτίο που βρίσκεται στον πολύ μικρό όγκο ΔV, η **χωρική πυκνότητα** ρ (ή ρ_v) του φορτίου ορίζεται από τη σχέση

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q_v}{\Delta V}. \tag{1.46}$$

Και το απειροστό φορτίο $dq_v = \rho dV$ μπορεί να θεωρηθεί ως σημειακό φορτίο τοποθετημένο στη θέση του στοιχειώδους όγκου dV.

Όπως φαίνεται από την (1.46), μονάδα μέτρησης της χωρικής πυκνότητας είναι το $1\ \mathrm{C/m^3}$. Όταν είναι γνωστή η χωρική πυκνότητα ρ ενός φορτίου διανεμημένου σ' έναν όγκο V, τότε το συνολικό φορτίο q_v που διανέμεται σ' ολόκληρον τον όγκο V δίνεται από το χωρικό ολοκλήρωμα

$$q_v = \int_V dq_v = \int_V \rho \, dV. \tag{1.47}$$

Αν V είναι ο όγκος στον οποίο διανέμεται το φορτίο q_v, η **μέση** χωρική πυκνότητα $\bar{\rho}$ ορίζεται από τον λόγο

$$\bar{\rho} = \frac{q_v}{V} = \frac{\displaystyle\int_V \rho \, dV}{V}. \tag{1.48}$$

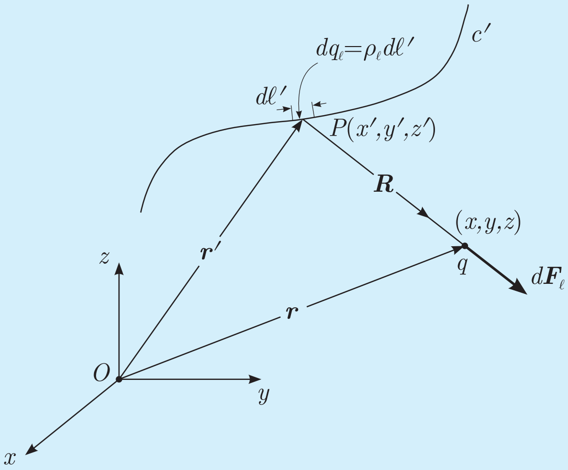
Αν ένα φορτίο q_v είναι έτσι διανεμημένο σ' έναν όγκο V, ώστε η χωρική πυκνότητα ρ να είναι σταθερή σε κάθε θέση (και ίση προφανώς προς τη μέση πυκνότητα $\bar{\rho}$), τότε ο όγκος V θεωρείται **ομοιόμορφα** ηλεκτρισμένος και η αντίστοιχη διανομή του φορτίου **ομοιόμορφη**.

Με βάση τον ορισμό της πυκνότητας χωρικού φορτίου, ένα σημειακό φορτίο q τοποθετημένο στην τυχούσα θέση $\boldsymbol{r}'$ του πεδίου μπορεί, επίσης, να θεωρηθεί ως κατανεμημένο χωρικό φορτίο πυκνότητας $\rho = q\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$, όπου $\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$ είναι η τριδιάστατη συνάρτηση δέλτα του Dirac, που αναλύεται στο παράρτημα Ε. Στην περίπτωση σημειακών φορτίων q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ τοποθετημένων στις θέσεις $\boldsymbol{r}'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, αντίστοιχα, η πυκνότητα φορτίου της ισοδύναμης χωρικής κατανομής δίνεται από την

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} q_i \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'_i). \tag{1.49}$$

1.7 Δυνάμεις σε σύστημα σημειακών και διανεμημένων φορτίων

Ας θεωρήσουμε, αρχικά, το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί το γραμμικά διανεμημένο φορτίο του Σχήματος 1.4 και ας ζητήσουμε να υπολογίσουμε τη δύναμη $\boldsymbol{F}_\ell$ που ασκείται στο τυχόν σημειακό φορτίο q, τοποθετημένο στην τυχούσα θέση (x, y, z) του πεδίου.



Σχημα 1.4: Συμβολή του απειροστού φορτίου q_ℓ στη δύναμη $\boldsymbol{F}_\ell$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω και αφού λάβουμε υπόψη την (1.32), το απειροστό φορτίο dq_ℓ που βρίσκεται στην τυχούσα θέση (x', y', z') της γραμμής c', ασκεί, στο σημειακό φορτίο q, τη δύναμη

$$d\boldsymbol{F}_\ell = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q\rho_\ell d\ell'}{R^3}\,\boldsymbol{R}. \tag{1.50}$$

Η συνολική, συνεπώς, δύναμη $\boldsymbol{F}_\ell$ που ασκεί ολόκληρο το φορτίο της γραμμής πάνω στο σημειακό φορτίο q, προκύπτει από τη – διανυσματική – πρόσθεση (υπέρθεση) όλων των απειροστών δυνάμεων $d\boldsymbol{F}_\ell$, δηλαδή από την ολοκλήρωση της (1.50) σ' ολόκληρο το μήκος της γραμμής:

$$\boldsymbol{F}_\ell = \frac{q}{4\pi\epsilon}\int_{c'}\frac{\rho_\ell \boldsymbol{R}}{R^3}\,d\ell'. \tag{1.51}$$

Με το ίδιο σκεπτικό προκύπτει ότι και στις περιπτώσεις όπου, αντί του γραμμικού φορτίου q_ℓ, έχουμε ένα επιφανειακό φορτίο q_s, ή ένα χωρικό φορτίο q_v, διανεμημένα, αντίστοιχα, σε μια επιφάνεια S ή σ' έναν όγκο V, οι αντίστοιχες δυνάμεις $\boldsymbol{F}_s$ και $\boldsymbol{F}_v$ δίνονται από τα ολοκληρώματα

$$\boldsymbol{F}_s = \frac{q}{4\pi\epsilon}\int_{S'}\frac{\rho_s \boldsymbol{R}}{R^3}\,dS', \tag{1.52}$$

$$\boldsymbol{F}_v = \frac{q}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho \boldsymbol{R}}{R^3}\, dV'. \tag{1.53}$$

Ας ζητήσουμε, στη συνέχεια, να υπολογίσουμε τη δύναμη που ασκεί, στο φορτίο q, τοποθετημένο στη θέση (x, y, z) του πεδίου, ένα σύστημα φορτίων που περιλαμβάνει: α) Σημειακά φορτία $q_1, q_2, \ldots, q_n$, τοποθετημένα στα σημεία με αντίστοιχες επιβατικές ακτίνες $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n$ ($\boldsymbol{r}_i = x_i\hat{\boldsymbol{x}} + y_i\hat{\boldsymbol{y}} + z_i\hat{\boldsymbol{z}},\ i = 1, 2, \ldots, n$), β) γραμμικό φορτίο διανεμημένο σε μία γραμμή (ή περισσότερες) c' με πυκνότητα ρ_ℓ, γ) επιφανειακό φορτίο διανεμημένο σε μια επιφάνεια (ή περισσότερες) S' με πυκνότητα ρ_s, και δ) χωρικό φορτίο διανεμημένο σε έναν όγκο (ή περισσότερους) V' με πυκνότητα ρ.

Από την αρχή της υπέρθεσης και τις (1.34), (1.51), (1.52) και (1.53) προκύπτει ότι η δύναμη $\boldsymbol{F}$ που ασκείται από το σύνολο των φορτίων του συστήματος είναι

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i \boldsymbol{R}_i}{R_i^3} + \int_{c'} \frac{\rho_\ell \boldsymbol{R}}{R^3}\, d\ell' + \int_{S'} \frac{\rho_s \boldsymbol{R}}{R^3}\, dS' + \int_{V'} \frac{\rho \boldsymbol{R}}{R^3}\, dV' \right\}} \tag{1.54}$$

όπου οι ολοκληρώσεις εκτείνονται πάνω σ' όλες τις γραμμές, επιφάνειες και όγκους όπου είναι διανεμημένα τα αντίστοιχα φορτία.

Οι συνιστώσες F_x, F_y, F_z της δύναμης $\boldsymbol{F}$ που ασκείται στο φορτίο q μπορούν να προκύψουν, εύκολα, από την (1.54), όταν λάβουμε υπόψη τις (1.36), (1.37) και τις

$$\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = (x - x')\hat{\boldsymbol{x}} + (y - y')\hat{\boldsymbol{y}} + (z - z')\hat{\boldsymbol{z}}, \tag{1.55}$$

$$R = \left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right| = \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\right]^{1/2}. \tag{1.56}$$

Έτσι, για παράδειγμα, η συνιστώσα F_x κατά τον άξονα x δίνεται από την

$$\begin{aligned} F_x = \frac{q}{4\pi\epsilon} \Bigg\{ & \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i (x - x_i)}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{3/2}} \\ & + \int_{c'} \frac{\rho_\ell (x - x')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}}\, d\ell' \\ & + \int_{S'} \frac{\rho_s (x - x')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}}\, dS' \\ & + \int_{V'} \frac{\rho (x - x')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}}\, dV' \Bigg\}. \end{aligned} \tag{1.57}$$

1.8 Πεδίο – Γενικοί ορισμοί

Σύμφωνα με τον γενικό ορισμό του πεδίου, ονομάζουμε **πεδίο** το χώρο εκείνο σε κάθε θέση του οποίου ορίζεται – κατά τρόπο μονοσήμαντο – ένα **χαρακτηριστικό φυσικό μέγεθος**. Όταν το χαρακτηριστικό φυσικό μέγεθος ενός πεδίου είναι διανυσματικό, το πεδίο ονομάζεται **διανυσματικό** (π.χ. το πεδίο βαρύτητας, το πεδίο ροής ρευστού κ.λ.π.). Πεδία που έχουν ως χαρακτηριστικό φυσικό μέγεθος κάποιο βαθμωτό ή σκαλινό (scalar) μέγεθος, ονομάζονται **βαθμωτά** ή **σκαλινά** πεδία (π.χ. το πεδίο της πυκνότητας μάζας ενός υλικού μέσου, το πεδίο θερμοκρασίας κ.λ.π.)

Διακρίνουμε, επίσης, και τα **τανυστικά** πεδία, στα οποία το χαρακτηριστικό φυσικό μέγεθος είναι τανυστικό (π.χ. το πεδίο των ελαστικών παραμορφώσεων ενός στερεού).

Σ' ένα πεδίο, η τιμή του χαρακτηριστικού του μεγέθους είναι, εν γένει, *συνάρτηση των χωρικών συντεταγμένων (π.χ. x,y,z) της θέσης και της θεωρούμενης χρονικής στιγμής t.*

Ένα πεδίο στο οποίο το χαρακτηριστικό μέγεθος είναι το ίδιο σε όλες τις θέσεις ονομάζεται **ομογενές** ή **ομοιόμορφο**. Έτσι, σ' ένα ομογενές διανυσματικό πεδίο το χαρακτηριστικό του μέγεθος έχει σε κάθε θέση, όχι μόνον το ίδιο μέτρο, αλλά και την ίδια διεύθυνση και φορά.

Όταν το χαρακτηριστικό μέγεθος ενός πεδίου είναι γνωστό σε κάθε θέση, τότε το πεδίο θεωρείται **πλήρως ορισμένο**.

Σύμφωνα με τους πιο πάνω ορισμούς, ένα ανεξάρτητο του χρόνου βαθμωτό πεδίο είναι πλήρως ορισμένο, όταν είναι γνωστή η συνάρτηση $\phi(x, y, z)$ του χαρακτηριστικού βαθμωτού του μεγέθους ϕ. Για να είναι ομογενές το πεδίο αυτό, πρέπει να είναι $\phi = \text{const}$. Παρόμοια, ένα διανυσματικό πεδίο ορίζεται όταν είναι γνωστή η διανυσματική συνάρτηση $\boldsymbol{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z)\hat{\boldsymbol{x}} + F_y(x, y, z)\hat{\boldsymbol{y}} + F_z(x, y, z)\hat{\boldsymbol{z}}$ του χαρακτηριστικού διανυσματικού μεγέθους $\boldsymbol{F}$. Το διανυσματικό αυτό πεδίο είναι ομογενές, όταν ισχύει η $\boldsymbol{F} = a\hat{\boldsymbol{x}} + b\hat{\boldsymbol{y}} + c\hat{\boldsymbol{z}}$, όπου a, b, c βαθμωτές σταθερές.

Ένα πεδίο ονομάζεται **μόνιμο** ή χρονοσταθερό, όταν το χαρακτηριστικό του μέγεθος είναι ανεξάρτητο του χρόνου, διατηρεί, δηλαδή με την πάροδο του χρόνου την ίδια τιμή σε κάθε θέση. Αν το χαρακτηριστικό μέγεθος είναι συνάρτηση και του χρόνου, τότε το πεδίο ονομάζεται **χρονικά μεταβαλλόμενο**.

Ένα μόνιμο πεδίο, για τη διατήρηση της χρονικής σταθερότητας του οποίου δεν απαιτείται δαπάνη ενέργειας, ονομάζεται **στατικό**. Σύμφωνα με τα παραπάνω, αν $\phi = \phi(x, y, z, t)$ είναι η συνάρτηση του χαρακτηριστικού μεγέθους ϕ ενός βαθμωτού πεδίου σε κάθε θέση και χρονική στιγμή, η μαθηματική συνθήκη που απαιτείται για το χαρακτηρισμό του πεδίου ως μονίμου είναι η

$$\frac{\partial \phi(x, y, z, t)}{\partial t} = 0. \tag{1.58}$$

Παρόμοια, ένα διανυσματικό πεδίο που το χαρακτηριστικό του διάνυσμα $\boldsymbol{F}$ δίνεται από τη διανυσματική συνάρτηση $\boldsymbol{F}(x,y,z,t) = F_x(x,y,z,t)\hat{\boldsymbol{x}} + F_y(x,y,z,t)\hat{\boldsymbol{y}} + F_z(x,y,z,t)\hat{\boldsymbol{z}}$, είναι μόνιμο όταν ισχύουν οι

$$\frac{\partial F_x(x,y,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial F_y(x,y,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial F_z(x,y,z,t)}{\partial t} = 0. \tag{1.59}$$

Όταν το χαρακτηριστικό φυσικό μέγεθος ενός πεδίου εκφράζει άμεσα ή έμμεσα κάποια δύναμη το πεδίο ονομάζεται **δυναμικό πεδίο**.

1.9 Ηλεκτρική πεδιακή ένταση $\boldsymbol{E}$

Όπως είδαμε προηγουμένως, όταν στον χώρο γύρω από ένα φορτίο, ή σ' ένα σύστημα φορτίων, βρεθεί ένα άλλο φορτίο, εξασκούνται πάνω σ' αυτό δυνάμεις. Δηλαδή το αρχικό φορτίο ή το σύστημα των φορτίων 'προσδίδει' στον περιβάλλοντα χώρο την ιδιότητα να 'ασκεί' δυνάμεις πάνω σε ηλεκτρικά φορτία που προσάγονται σ' αυτόν. Ένας χώρος στον οποίο ασκούνται ηλεκτρικές δυνάμεις πάνω σε ηλεκτρικά φορτία ονομάζεται **ηλεκτρικό πεδίο**.

Η ύπαρξη και οι ιδιότητες του ηλεκτρικού πεδίου διαπιστώνονται με την εισαγωγή σ' αυτό ενός **δοκιμαστικού φορτίου** (υποθέματος) . Ένα φορτίο χαρακτηρίζεται ως δοκιμαστικό όταν:

α) Οι γεωμετρικές διαστάσεις του σώματος στο οποίο διανέμεται είναι πάρα πολύ μικρές, μπορεί, δηλαδή να θεωρηθεί ως σημειακό φορτίο.

β) Η τιμή του φορτίου είναι παρά πολύ μικρή, έτσι ώστε η εισαγωγή του στον χώρο ενός ηλεκτρικού πεδίου να μη επιφέρει καμιά ουσιώδη μεταβολή στην προ της εισαγωγής κατάσταση.

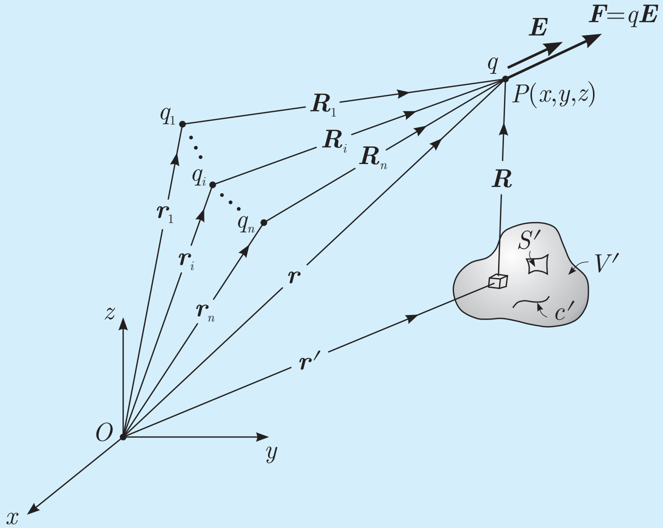
Ας θεωρήσουμε, στη συνέχεια, ότι στο τυχόν σημείο $P(x,y,z)$ ενός πεδίου που δημιουργείται από τα σημειακά και τα διανεμημένα φορτία του Σχήματος 1.5, εισάγεται ένα δοκιμαστικό ηλεκτρικό φορτίο q. Η δύναμη $\boldsymbol{F}$ που ασκείται στο δοκιμαστικό φορτίο q, σύμφωνα με την (1.54), είναι ανάλογη του φορτίου q. Αν, συνεπώς, η (1.54) γραφεί με τη μορφή

$$\boxed{\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}/q} \tag{1.60}$$

όπου

$$\boxed{\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i\boldsymbol{R}_i}{R_i^3} + \int_{c'}\frac{\rho_\ell\boldsymbol{R}}{R^3}\,d\ell' + \int_{S'}\frac{\rho_s\boldsymbol{R}}{R^3}\,dS' + \int_{V'}\frac{\rho\boldsymbol{R}}{R^3}\,dV'\right\}} \tag{1.61}$$

παρατηρούμε ότι το διανυσματικό μέγεθος $\boldsymbol{E}$, που εκφράζει την ανά μονάδα θετικού φορτίου ασκούμενη δύναμη στη θέση $P(x,y,z)$, είναι ανεξάρτητο της τιμής q του δοκιμαστικού φορτίου. Το μέγεθος αυτό, όπως φαίνεται από την (1.61), εξαρτάται μόνον από το μέγεθος και τις θέσεις των φορτίων του συστήματος και από τις συντεταγμένες του θεωρούμενου σημείου, είναι, δηλαδή ένα μέγεθος που μπορεί να περιγράψει τις ιδιότητες του πεδίου.



Σχημα 1.5: Ηλεκτρική πεδιακή ένταση $\boldsymbol{E}$.

Το διανυσματικό μέγεθος $\boldsymbol{E}$ λαμβάνεται ως το χαρακτηριστικό φυσικό μέγεθος του ηλεκτρικού πεδίου και ονομάζεται **ηλεκτρική πεδιακή ένταση** (electric field intensity) ή **ένταση του ηλεκτρικού πεδίου** ή και απλώς **διάνυσμα** $\boldsymbol{E}$.

Από την (1.60) φαίνεται, αμέσως, ότι μονάδα μέτρησης της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου είναι το $1\ \mathrm{N/C}$. Όπως, όμως, αναφέραμε στην παράγραφο 1.1 και όπως θα δούμε σε επόμενη παράγραφο, ισοδύναμη προς τη μονάδα $\mathrm{N/C}$ της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης είναι η ευρύτερα χρησιμοποιούμενη μονάδα $\mathrm{V/m}$.

Σύμφωνα με τους ορισμούς της προηγούμενης παραγράφου, το ηλεκτρικό πεδίο είναι **ένα διανυσματικό δυναμικό πεδίο**, αφού το χαρακτηριστικό του μέγεθος $\boldsymbol{E}$ είναι διανυσματικό και εκφράζει την ανά μονάδα θετικού δοκιμαστικού φορτίου ασκούμενη δύναμη σε κάθε θέση. Επίσης, σύμφωνα με τους ορισμούς αυτούς, ένα ηλεκτρικό πεδίο του οποίου η ένταση είναι παντού σταθερή (κατά μέτρο, διεύθυνση και φορά) ονομάζεται *ομοιόμορφο* ή *ομογενές ηλεκτρικό πεδίο*. Ακόμη, από την (1.60) παρατηρούμε ότι η αρχή της *υπέρθεσης (επαλληλίας)* που ισχύει για τη δύναμη $\boldsymbol{F}$ ισχύει, προφανώς, και για την ηλεκτρική πεδιακή ένταση $\boldsymbol{E}$.

Επιστρέφοντας στις βασικές σχέσεις (1.60) και (1.61), όπως αμέσως φαίνεται από την (1.60), το διάνυσμα $\boldsymbol{E}$ της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης είναι ομόρροπο προς το διάνυσμα $\boldsymbol{F}$ της δύναμης όταν το φορτίο q είναι θετικό $(q > 0)$ και αντίρροπο όταν το φορτίο q είναι αρνητικό $(q < 0)$. Επίσης, από την (1.61) προκύπτουν εύκολα οι εκφράσεις των συνιστωσών E_x, E_y, E_z του διανύσματος $\boldsymbol{E}$ της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης, σ' ένα τυχόν σύστημα ορθογώνιων καρτεσιανών συντεταγμένων. Έτσι, για παράδειγμα και κατ' αναλογία προς την (1.57), η συνιστώσα E_x της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης δίνεται από την

$$\begin{aligned} E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon} \Bigg\{ & \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i(x - x_i)}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{3/2}} \\ & + \int_{C'} \frac{\rho_\ell (x - x')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}}\, d\ell' \\ & + \int_{S'} \frac{\rho_s (x - x')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}}\, dS' \\ & + \int_{V'} \frac{\rho (x - x')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}}\, dV' \Bigg\}, \end{aligned} \tag{1.62}$$

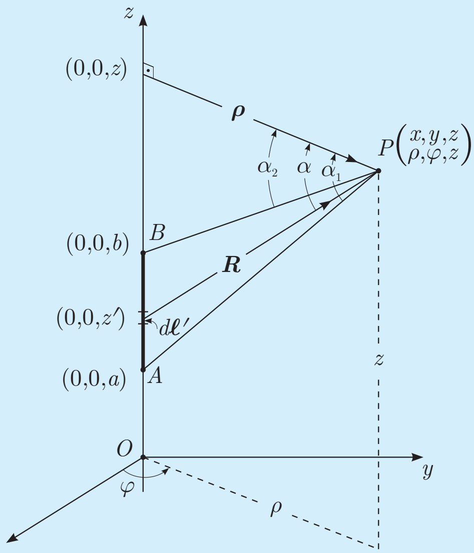
όπου x, y, z είναι οι συντεταγμένες του τυχόντος σημείου P του χώρου, x_i, y_i, z_i οι συντεταγμένες των θέσεων των σημειακών φορτίων q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ και x', y', z' οι συντεταγμένες της θέσης του απειροστού φορτίου $\rho_\ell d\ell'$, ή $\rho_s dS'$, ή $\rho dV'$. Είναι φανερό ότι ανάλογες προς την (1.62) είναι και οι εκφράσεις των δύο άλλων συνιστωσών E_y και E_z.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3

Γραμμικό φορτίο είναι ομοιόμορφα διανεμημένο, με πυκνότητα ρ_ℓ, στο τμήμα μεταξύ των σημείων $A(0, 0, a)$ και $B(0, 0, b)$ του άξονα z, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.6. Να υπολογιστεί η ηλεκτρική πεδιακή ένταση $\boldsymbol{E}$ στο τυχόν σημείο $P(x, y, z)$ του χώρου (*στο παράδειγμα αυτό, αλλά και σε όσα επόμενα δεν δίνεται η διηλεκτρική σταθερά του περιβάλλοντος μέσου, αυτή θα εξυπονοείται ότι είναι ίση με τη διηλεκτρική σταθερά* ϵ_0 *του κενού χώρου*).

Αν θεωρήσουμε το στοιχειώδες φορτίο $dq_\ell = \rho_\ell d\ell'$, το οποίο είναι διανεμημένο στο απειροστό τμήμα $d\boldsymbol{\ell}' = dz'\hat{\boldsymbol{z}}$ του άξονα z, ως σημειακό, τότε η διαφορική συμβολή του στη συνολική ένταση $\boldsymbol{E}(x, y, z)$ στο σημείο P του πεδίου είναι

$$d\boldsymbol{E} = \frac{dq_\ell}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} = \frac{\rho_\ell}{4\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\, dz', \tag{i}$$



Σχημα 1.6: Γραμμικό φορτίο ομοιόμορφα διανεμημένο στο ευθύγραμμο τμήμα AB.

όπου, με επιλογή των 'τονούμενων' συντεταγμένων (x', y', z') για τις θέσεις των φορτίων και των (x, y, z) για τα σημεία παρατήρησης του πεδίου, η διανυσματική απόσταση $\boldsymbol{R}$ δίνεται από την

$$\boldsymbol{R} = (x-0)\hat{\boldsymbol{x}} + (y-0)\hat{\boldsymbol{y}} + (z-z')\hat{\boldsymbol{z}} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + (z-z')\hat{\boldsymbol{z}}. \qquad \text{(ii)}$$

Η ζητούμενη συνολική ένταση $\boldsymbol{E}(x, y, z)$ προκύπτει, προφανώς, από την υπέρθεση των απειροστών εντάσεων όλων των στοιχειωδών φορτίων, δηλαδή από την ολοκλήρωση των μελών της (i) σε όλο το μήκος του γραμμικού φορτίου

$$\boldsymbol{E} = \int_a^b \frac{\rho_\ell}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\,dz'.$$

Αντικατάσταση της έκφρασης της $\boldsymbol{R}$, που, σε κυλινδρικές συντεταγμένες, γράφεται

$$\boldsymbol{R} = \rho\hat{\boldsymbol{\rho}} - (z'-z)\hat{\boldsymbol{z}}, \qquad \text{(iii)}$$

στην προηγούμενη σχέση, δίνει

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \frac{\rho_\ell}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} - (z'-z)\hat{\boldsymbol{z}}}{\left[\rho^2 + (z'-z)^2\right]^{3/2}}\,dz' \\ &= \frac{\rho_\ell}{4\pi\epsilon_0}\left\{\rho\hat{\boldsymbol{\rho}}\int_a^b \frac{dz'}{\left[\rho^2 + (z'-z)^2\right]^{3/2}} - \hat{\boldsymbol{z}}\int_a^b \frac{(z'-z)dz'}{\left[\rho^2 + (z'-z)^2\right]^{3/2}}\right\}\end{aligned}$$

$$= \frac{\rho_\ell}{4\pi\epsilon_0}\left\{\rho\hat{\boldsymbol{\rho}}\left.\frac{z'-z}{\rho^2\left[\rho^2+(z'-z)^2\right]^{1/2}}\right|_a^b + \hat{\boldsymbol{z}}\left.\frac{1}{\left[\rho^2+(z'-z)^2\right]^{1/2}}\right|_a^b\right\}$$

ή

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_\ell}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{\rho}\left[\frac{b-z}{\left[\rho^2+(b-z)^2\right]^{1/2}} - \frac{a-z}{\left[\rho^2+(a-z)^2\right]^{1/2}}\right]\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left[\frac{1}{\left[\rho^2+(b-z)^2\right]^{1/2}} - \frac{1}{\left[\rho^2+(a-z)^2\right]^{1/2}}\right]\hat{\boldsymbol{z}}\right\}. \qquad \text{(iv)}$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί, επίσης, να γραφεί συντομότερα συναρτήσει των γωνιών α_1, α_2 του Σχήματος 1.6 με τη μορφή

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_\ell}{4\pi\epsilon_0\rho}\left[(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)\hat{\boldsymbol{\rho}} + (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)\hat{\boldsymbol{z}}\right]. \qquad \text{(v)}$$

Από την (iv) (ή την (v)) προκύπτει εύκολα, ως ειδική περίπτωση, η ηλεκτρική πεδιακή ένταση μιας ομοιόμορφα φορτισμένης ευθύγραμμης γραμμικής πηγής άπειρου μήκους. Στην περίπτωση αυτή, για $b \to +\infty$, $a \to -\infty$, (ή για $\alpha_1 = \pi/2$, $\alpha_2 = -\pi/2$) έχουμε

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}. \qquad \text{(vi)}$$

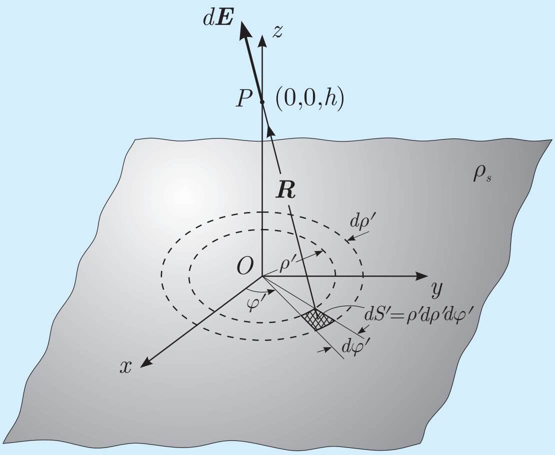
Ας σημειωθεί ότι και στην περίπτωση όπου η γραμμική πηγή άπειρου μήκους δεν ταυτίζεται με τον άξονα z, η τελευταία εξίσωση εξακολουθεί να εκφράζει την ένταση του πεδίου , όπου ρ είναι η απόσταση του σημείου παρατήρησης από τη γραμμική πηγή και $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα που έχει τη διεύθυνση της καθέτου από το σημείο παρατήρησης στη γραμμή και φορά από τη γραμμή προς το σημείο παρατήρησης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4

Να υπολογιστεί η πεδιακή ένταση $\boldsymbol{E}$ στο τυχόν σημείο P του πεδίου ενός ομοιόμορφα διανεμημένου, με σταθερή επιφανειακή πυκνότητα ρ_s, φορτίου στο απέραντο επίπεδο $z = 0$.

Επιλέγοντας τη θέση του σημείου P πάνω στον άξονα z, με αναφορά στο Σχήμα 1.7 και χρησιμοποίηση κυλινδρικών συντεταγμένων, η στοιχειώδης ηλεκτρική πεδιακή ένταση που οφείλεται στο απειροστό φορτίο $dQ_s = \rho_s dS'$ δίνεται από την

$$d\boldsymbol{E} = \frac{dQ_s}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}, \qquad \text{(i)}$$



ΣΧΗΜΑ 1.7: Ομοιόμορφα διανεμημένο φορτίο σε απέραντο επίπεδο $z = 0$.

όπου

$$dQ_s = \rho_s dS' = \rho_s \rho' d\rho' d\varphi', \tag{ii}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R} &= (x - x')\hat{\boldsymbol{x}} + (y - y')\hat{\boldsymbol{y}} + (z - z')\hat{\boldsymbol{z}} = -x'\hat{\boldsymbol{x}} - y'\hat{\boldsymbol{y}} + h\hat{\boldsymbol{z}} \\ &= -\rho' \cos\varphi' \hat{\boldsymbol{x}} - \rho' \sin\varphi' \hat{\boldsymbol{y}} + h\hat{\boldsymbol{z}} = -\rho' \hat{\boldsymbol{\rho}} + h\hat{\boldsymbol{z}}, \end{aligned} \tag{iii}$$

$$R = |\boldsymbol{R}| = \left(\rho'^2 + h^2\right)^{1/2}. \tag{iv}$$

Η απειροστή ένταση, με αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στην (i), γράφεται

$$d\boldsymbol{E} = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \frac{-\rho' \cos\varphi' \hat{\boldsymbol{x}} - \rho' \sin\varphi' \hat{\boldsymbol{y}} + h\hat{\boldsymbol{z}}}{(\rho'^2 + h^2)^{3/2}} \rho' d\rho' d\varphi'. \tag{v}$$

Η ζητούμενη, συνεπώς, ένταση $\boldsymbol{E}$ που προκύπτει από την ολοκλήρωση της (v) σε ολόκληρο το επίπεδο $z = 0$, δίνεται από την

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} = \int_S d\boldsymbol{E} &= \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_{\rho'=0}^{\rho'=\infty} \int_{\varphi'=0}^{\varphi'=2\pi} \frac{-\rho' \cos\varphi' \hat{\boldsymbol{x}} - \rho' \sin\varphi' \hat{\boldsymbol{y}} + h\hat{\boldsymbol{z}}}{(\rho'^2 + h^2)^{3/2}} \rho' d\rho' d\varphi' \\ &= \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\hat{\boldsymbol{x}} \int_0^\infty \frac{\rho'^2 d\rho'}{(\rho'^2 + h^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos\varphi' d\varphi' \right. \\ &\qquad -\hat{\boldsymbol{y}} \int_0^\infty \frac{\rho'^2 d\rho'}{(\rho'^2 + h^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \sin\varphi' d\varphi' \\ &\qquad + \hat{\boldsymbol{z}} \int_0^\infty \frac{h\rho'}{(\rho'^2 + h^2)^{3/2}} d\rho' \int_0^{2\pi} d\varphi' \end{aligned}$$

ή, επειδή τα ως προς φ' ολοκληρώματα των δύο πρώτων όρων στο δεξιό μέλος είναι μηδέν, από την

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0}\,h(2\pi)\int_0^\infty \frac{\rho' d\rho'}{(\rho'^2+h^2)^{3/2}} = \hat{\boldsymbol{z}}\,\frac{\rho_s h}{2\epsilon_0}\left[\frac{-1}{(\rho'^2+h^2)^{1/2}}\right]\Bigg|_0^\infty$$

δηλαδή από την

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{z}}. \tag{vi}$$

Η (vi), η οποία ισχύει και για τα σημεία του χώρου που βρίσκονται κάτω από το επίπεδο $z = 0$ ($z \leqslant 0$), με αντιστροφή, όμως, της κατεύθυνσης, γράφεται, τελικά, με τη μορφή

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{z}}{|\boldsymbol{z}|}. \tag{vii}$$

Γενικά, η ένταση του πεδίου ενός ομοιόμορφα ‘φορτισμένου επιπέδου’ δίνεται από την

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{n}}, \tag{viii}$$

όπου $\hat{\boldsymbol{n}}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο, με φορά από το επίπεδο προς το σημείο παρατήρησης.

Ας παρατηρηθεί, τέλος, ότι το πεδίο είναι το ίδιο σε όλα τα σημεία του χώρου $z > 0$ (και αντίστοιχα σε όλα τα σημεία του χώρου $z < 0$) και δεν εξαρτάται από την απόστασή τους από το επίπεδο.

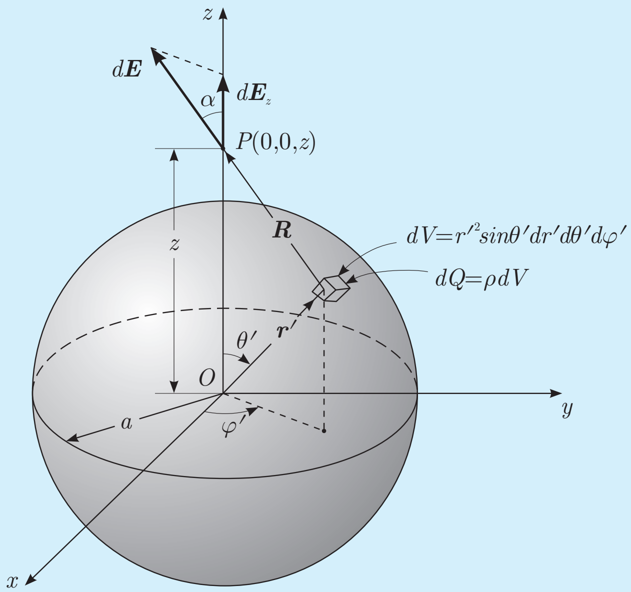
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.5

Να υπολογιστεί η ηλεκτρική πεδιακή ένταση $\boldsymbol{E}$ στον εκτός του ομοιόμορφα φορτισμένου, με σταθερή χωρική πυκνότητα φορτίου ρ, σφαιρικού όγκου ακτίνας a του Σχήματος 1.8.

Επιλέγοντας τη θέση του σημείου παρατήρησης πάνω στον άξονα z ($P(0,0,z)$) ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων που η αρχή του συμπίπτει με το κέντρο O της σφαίρας, η ηλεκτρική πεδιακή ένταση $d\boldsymbol{E}$ που οφείλεται στο στοιχειώδες φορτίο dQ του απειροστού όγκου dV' της σφαίρας, δίνεται από τη σχέση

$$d\boldsymbol{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} = \frac{\rho dV'}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}. \tag{i}$$

Είναι προφανές ότι στο θεωρούμενο πρόβλημα, λόγω της υφιστάμενης σφαιρικής συμμετρίας, ενδείκνυται η χρησιμοποίηση σφαιρικών συντεταγμένων. Είναι, επίσης, προφανές ότι, λόγω της υφιστάμενης συμμετρίας, η μόνη μη μηδενική συνιστώσα της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης είναι η E_z. Έχουμε, συνεπώς,



Σχημα 1.8: Ομοιόμορφα φορτισμένος σφαιρικός όγκος ακτίνας a με σταθερή χωρική πυκνότητα φορτίου ρ.

$$d\boldsymbol{E}_z = \hat{\boldsymbol{z}} dE\cos\alpha = \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\rho dV'}{4\pi\epsilon_0 R^2}\cos\alpha = \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\rho}{4\pi\epsilon_0}\frac{r'^2\cos\alpha\sin\theta' dr' d\theta' d\varphi'}{R^2},$$

$$\boldsymbol{E} = \int_{V'} d\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{z}}\,\frac{\rho}{4\pi\epsilon_0}\int_{r'=0}^{r'=a}\int_{\theta'=0}^{\theta'=\pi}\int_{\varphi'=0}^{\varphi'=2\pi}\frac{r'^2\cos\alpha\sin\theta' dr' d\theta' d\varphi'}{R^2}$$

ή, μετά την ολοκλήρωση ως προς φ',

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\rho}{2\epsilon_0}\int_{r'=0}^{r'=a}\int_{\theta'=0}^{\theta'=\pi}\frac{r'^2\cos\alpha\sin\theta' dr' d\theta'}{R^2}. \tag{ii}$$

Η εκτέλεση της διπλής ολοκλήρωσης στην (ii) διευκολύνεται με τη χρησιμοποίηση των r' και R ως ανεξάρτητων μεταβλητών. Προς το σκοπό αυτό, με αναφορά στο Σχήμα 1.8, από τον νόμο του συνημιτόνου προκύπτουν οι σχέσεις

$$\cos\theta' = \frac{r'^2 + z^2 - R^2}{2zr'} \tag{iii}$$

και

$$\cos\alpha = \frac{R^2 + z^2 - r'^2}{2zR}. \tag{iv}$$

Από τη διαφόριση των μελών της προτελευταίας εξίσωσης, όταν τα z, r' διατηρούνται σταθερά, έχουμε

$$\sin\theta' d\theta' = \frac{RdR}{zr'}. \tag{v}$$

Με αντικατάσταση των εκφράσεων των (iv), (v) στην (ii), και αφού λάβουμε υπόψη ότι το ως προς R διάστημα ολοκλήρωσης είναι το $z - r' \leqslant R \leqslant z + r'$, προκύπτει

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\rho}{4\epsilon_0 z^2}\int_0^a \int_{z-r'}^{z+r'} r'\left(1 + \frac{z^2 - r'^2}{R^2}\right) dRdr' \\
&= \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\rho}{4\epsilon_0 z^2}\int_0^a r'\left[R - \frac{z^2 - r'^2}{R}\right]\Bigg|_{z-r'}^{z+r'} dr' = \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\rho}{4\epsilon_0 z^2}\int_0^a 4r'^2 dr' \\
&= \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\rho}{\epsilon_0 z^2}\frac{a^3}{3} = \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 z^2}\left(\frac{4\pi}{3}a^3\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}\,\hat{\boldsymbol{z}},
\end{aligned} \tag{vi}$$

όπου Q είναι το συνολικό φορτίο της σφαίρας.

Η σχέση αυτή εκφράζει την ηλεκτρική πεδιακή ένταση στο σημείο $P(0, 0, z)$ του εκτός της σφαίρας χώρου. Λόγω της ομοιόμορφης κατανομής του φορτίου, είναι προφανές ότι η ένταση στο τυχόν σημείο $P(r, \theta, \varphi)$ του εκτός της σφαίρας χώρου δίνεται από την

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}. \tag{vii}$$

Όπως παρατηρούμε, η ηλεκτρική πεδιακή ένταση, στα εκτός του σφαιρικού όγκου σημεία, είναι ίδια με την ένταση ενός σημειακού φορτίου ίσου με το συνολικό φορτίο της σφαίρας τοποθετημένου στο κέντρο της.

Ας σημειωθεί, τέλος, ότι όπως θα δούμε στη συνέχεια του κεφαλαίου, τόσο η πιο πάνω έκφραση της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης, όσο και οι ανάλογες εκφράσεις της έντασης του πεδίου των δύο προηγούμενων παραδειγμάτων, προκύπτουν ευκολότερα με τη βοήθεια του νόμου του Gauss.

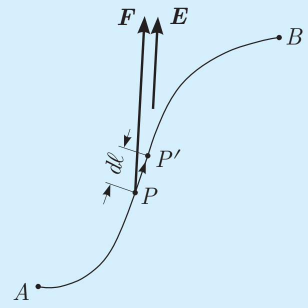
1.10 Το έργο των δυνάμεων του ηλεκτρικού πεδίου

Ας θεωρήσουμε ένα ηλεκτροστατικό πεδίο που δημιουργείται από τυχόντα σημειακά, ή μη, φορτία. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, αν στο τυχόν σημείο P του πεδίου (Σχήμα 1.9) προσαχθεί ένα δοκιμαστικό φορτίο q, πάνω στο φορτίο αυτό ασκείται από το πεδίο η δύναμη

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}, \tag{1.63}$$

όπου $\boldsymbol{E}$ είναι η ηλεκτρική πεδιακή ένταση στο σημείο P.

Στη συνέχεια, θεωρούμε μιαν απειροστή μετατόπιση $\boldsymbol{PP'} = d\boldsymbol{\ell}$ του φορτίου q. Η μετατόπιση αυτή μπορεί να οφείλεται, είτε μόνο στην επίδραση της πεδιακής δύναμης $\boldsymbol{F}$, είτε και στην επίδραση άλλων δυνάμεων.



Σχημα 1.9: Έργο πεδιακών δυνάμεων.

Το έργο dW της δύναμης $\boldsymbol{F}$ κατά την απειροστή μετατόπιση $d\boldsymbol{\ell}$ του σημείου εφαρμογής της είναι, σύμφωνα με τον ορισμό του έργου, ίσο προς το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\boldsymbol{F}$ και $d\boldsymbol{\ell}$, ή, λαμβάνοντας υπόψη και την (1.63),

$$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = q\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}. \tag{1.64}$$

Έτσι, κατά την τυχούσα πεπερασμένη μετατόπιση του φορτίου q από μια αρχική θέση A σε μια τελική θέση B κατά μήκος μιας τυχούσας καμπύλης, το συνολικό έργο W_{AB} δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\boxed{W_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = q\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}} \tag{1.65}$$

Το έργο W_{AB} που δίνεται από την (1.65) μπορεί να προκύψει θετικό, αρνητικό, ή μηδέν:

α) $W_{AB} > 0$. Στην περίπτωση αυτή, θετικό έργο σημαίνει παραγωγή έργου από τις πεδιακές δυνάμεις προς όφελος του εξωτερικού κόσμου. Για να μπορεί, όμως, να αποδοθεί έργο στον εξωτερικό (τον εκτός, δηλαδή του ηλεκτρικού πεδίου) κόσμο, πρέπει στο ηλεκτρικό πεδίο να υπάρχει ενταμιευμένη δυναμική ενέργεια η οποία προφανώς προσδόθηκε σ' αυτό κατά το σχηματισμό του. Έτσι λοιπόν, κατά τη μετακίνηση του φορτίου q από το σημείο A μέχρι το σημείο B η εσωτερική δυναμική ενέργεια του ηλεκτροστατικού πεδίου μειώνεται κατά την ποσότητα W_{AB}.

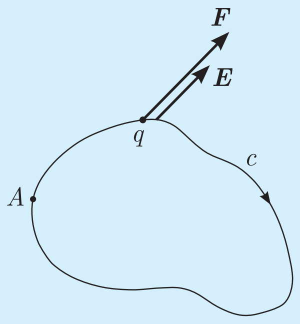
β) $W_{AB} < 0$. Αντίθετα προς την προηγούμενη περίπτωση, αν το έργο W_{AB} προκύψει αρνητικό, αυτό σημαίνει ότι προσδίδεται στο πεδίο από τον εξωτερικό κόσμο έργο $|W_{AB}|$. Κατά τη μετακίνηση, συνεπώς, του φορτίου q από την αρχική θέση A μέχρι την τελική θέση B, το έργο των πεδιακών δυνάμεων είναι αρνητικό και αντισταθμίζει το έργο των εξωτερικών δυνάμεων που πρέπει να υπερνικήσουν τις δυνάμεις του πεδίου για την πραγματοποίηση της μετακίνησης. Έτσι, στην περίπτωση αυτή την ενέργεια $|W_{AB}|$ που χάνει ο εξωτερικός κόσμος την κερδίζει το ηλεκτροστατικό πεδίο του οποίου η δυναμική ενέργεια αυξάνεται κατά την ποσότητα $|W_{AB}|$.

γ) $W_{AB} = 0$. Αν, τέλος, το έργο W_{AB} προκύψει ίσο με μηδέν, αυτό σημαίνει ότι κατά τη μετακίνηση του φορτίου q από το A μέχρι το B οι πεδιακές δυνάμεις, συνολικά, ούτε παρήγαγαν, ούτε δαπάνησαν έργο. Συνεπώς, η δυναμική ενέργεια του πεδίου μένει αμετάβλητη, αφού η συνολική ενέργεια που αποδόθηκε από το πεδίο στον εξωτερικό κόσμο, ή αντίστροφα, είναι ίση με μηδέν.

1.11 Ο νόμος του αστροβίλου του ηλεκτρικού πεδίου

Στην προηγούμενη παράγραφο, υπολογίστηκε το έργο W_{AB} των πεδιακών δυνάμεων κατά τη μετακίνηση ενός δοκιμαστικού φορτίου q από μια αρχική θέση A μέχρι μια τελική θέση B του πεδίου. Ας υποθέσουμε, στη συνέχεια, ότι το φορτίο q κινείται κατά μήκος μιας οποιασδήποτε κλειστής καμπύλης c επιστρέφοντας και πάλι στην αρχική θέση A (Σχήμα 1.10). Τότε σύμφωνα με την (1.65), το έργο W των πεδιακών δυνάμεων κατά τη μετακίνηση του φορτίου q πάνω στην καμπύλη c δίνεται από τα κλειστά επικαμπύλια ολοκληρώματα

$$W = \oint_c \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = q \oint_c \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}. \tag{1.66}$$



ΣΧΗΜΑ 1.10: Κλειστή διαδρομή c του φορτίου q.

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε ότι όταν το φορτίο q ακολουθεί τυχούσα κλειστή διαδρομή c επιστρέφοντας και πάλι στην αρχική θέση A, το παραγόμενο έργο είναι πάντοτε μηδενικό. Προς τον σκοπό αυτό, ξεκινούμε από τη διαπίστωση ότι η αρχική κατάσταση του πεδίου, κατά την εκκίνηση του φορτίου q από το σημείο A είναι ακριβώς η ίδια με την τελική κατάσταση του πεδίου, κατά την επιστροφή του φορτίου q και πάλι στο σημείο A, επειδή και στις δύο περιπτώσεις, τόσο οι θέσεις όσο και οι αλγεβρικές τιμές των αντίστοιχων φορτίων, παραμένουν αμετάβλητες.

Η δυναμική, συνεπώς, ενέργεια του πεδίου στην τελική κατάσταση είναι η ίδια με τη δυναμική ενέργεια του πεδίου στην αρχική κατάσταση.

Αν, λοιπόν, υποθέσουμε ότι το έργο W των πεδιακών δυνάμεων είναι θετικό ($W > 0$), αυτό σημαίνει ότι ο εξωτερικός κόσμος κερδίζει ενέργεια ίση προς το έργο W που παράγουν οι πεδιακές δυνάμεις. Η αύξηση αυτή της ενέργειας του εξωτερικού κόσμου μπορεί να προέλθει είτε από αντίστοιχη μείωση της δυναμικής ενέργειας του πεδίου, είτε από άλλη ενέργεια που, τυχόν, προσδίδεται στο πεδίο και που, στη συνέχεια, εμφανίζεται ως έργο των πεδιακών δυνάμεων. Αλλά μείωση της ενέργειας του πεδίου δεν μπορεί να συμβεί, αφού όπως είδαμε στην αρχική και τελική κατάσταση η ενέργεια του πεδίου είναι ίδια. Εξάλλου, επειδή το πεδίο είναι στατικό, για τη συντήρησή του, δεν απαιτείται να προσδοθεί ενέργεια από πουθενά. Συμπεραίνουμε, συνεπώς, ότι το έργο W των πεδιακών δυνάμεων δεν μπορεί να είναι θετικό.

Το έργο W, όμως, δεν μπορεί να είναι ούτε αρνητικό ($W < 0$), γιατί τότε ο εξωτερικός κόσμος χάνει ενέργεια που δεν την κερδίζει κανείς, όπως προκύπτει με ανάλογο προς τον προηγούμενο συλλογισμό. Ότι η υπόθεση $W < 0$ δεν ευσταθεί, μπορεί να αποδειχτεί και με βάση το άτοπο της προηγούμενης υπόθεσης (ότι, δηλαδή δεν είναι δυνατό να έχουμε $W > 0$) ως εξής: Έστω, λοιπόν, ότι $W < 0$. Αν, τώρα, θεωρήσουμε ότι το φορτίο q διαγράφει και πάλι την κλειστή διαδρομή c αλλά κατά την αντίστροφη φορά, το έργο W' του φορτίου q στην περίπτωση αυτή είναι, προφανώς, σύμφωνα με την (1.66), $W' = -W > 0$. Αλλά θετικό έργο δεν μπορούμε να έχουμε όπως ήδη αποδείξαμε.

Εφόσον, λοιπόν, το έργο W δεν μπορεί να είναι ούτε θετικό, ούτε αρνητικό, είναι ίσο με μηδέν. Έτσι, η (1.66) γράφεται

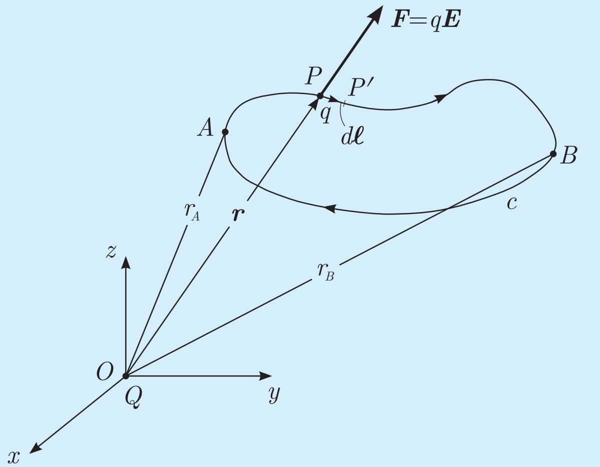
$$\oint_c \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = q \oint_c \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0. \tag{1.67}$$

Στην πιο πάνω ανάλυση, η απόδειξη της (1.67) βασίστηκε στην αρχή της διατήρησης της ενέργειας και στον ορισμό του στατικού πεδίου.

Στην ίδια, όμως, σχέση μπορούμε να φθάσουμε και ως εξής:

Ας θεωρήσουμε, αρχικά, ένα σημειακό φορτίο Q τοποθετημένο στην αρχή O κάποιου συστήματος συντεταγμένων. Θεωρούμε, επίσης, ότι ένα δοκιμαστικό φορτίο q κινείται στο πεδίο του φορτίου Q διαγράφοντας την κλειστή διαδρομή c του Σχήματος 1.11 με αρχική και τελική θέση το σημείο A της καμπύλης c. Το έργο dW κατά την απειροστή μετατόπιση $\boldsymbol{PP'} = d\boldsymbol{\ell}$ του φορτίου q πάνω στην καμπύλη c από το σημείο P στο γειτονικό σημείο P', είναι

$$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = q\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}. \tag{1.68}$$



Σχημα 1.11: Μετακίνηση του φορτίου q πάνω στην καμπύλη c.

Αν $\boldsymbol{r}$ είναι η επιβατική ακτίνα που καθορίζει τη θέση P του φορτίου q στην καμπύλη c, τότε η ένταση $\boldsymbol{E}$ στη θέση αυτή είναι, ως γνωστόν,

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}. \tag{1.69}$$

Η (1.68), με αντικατάσταση της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης από την (1.69), γράφεται

$$dW = \frac{Qq}{4\pi\epsilon}\frac{\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{\ell}}{r^3} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon}\frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot d\boldsymbol{\ell}}{r^2}, \tag{1.70}$$

όπου $\hat{\boldsymbol{r}}$ είναι το μοναδιαίο, κατά την ακτινική διεύθυνση, διάνυσμα.

Αν (x, y, z), (ρ, φ, z), (r, θ, φ) είναι οι καρτεσιανές (ορθογωνικές), κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες του σημείου P και $(x + dx, y + dy, z + dz)$, $(r + dr, \varphi + d\varphi, z + dz)$, $(r + dr, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$ οι αντίστοιχες συντεταγμένες του απειροστά γειτονικού του σημείου P', τότε οι εκφράσεις της απειροστής μετατόπισης $d\boldsymbol{\ell}$ στα τρία συστήματα συντεταγμένων είναι, σύμφωνα με τις σχετικές σχέσεις του Παραρτήματος Δ,

$$\boxed{d\boldsymbol{\ell} = dx\hat{\boldsymbol{x}} + dy\hat{\boldsymbol{y}} + dz\hat{\boldsymbol{z}}} \qquad \text{(Καρτεσιανές)}$$

$$\boxed{d\boldsymbol{\ell} = d\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}} + dz\hat{\boldsymbol{z}}} \qquad \text{(Κυλινδρικές)} \tag{1.71}$$

$$\boxed{d\boldsymbol{\ell} = dr\hat{\boldsymbol{r}} + rd\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\, d\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}}} \qquad \text{(Σφαιρικές)}$$

Με αντικατάσταση της απειροστής μετατόπισης $d\boldsymbol{\ell}$ από την έκφρασή της σε σφαιρικές συντεταγμένες, η (1.70), λόγω της (1.71), γράφεται

$$dW = \frac{Qq}{4\pi\epsilon r^2}\left[dr(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}) + rd\theta(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}) + r\sin\theta\, d\phi(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}})\right]$$

ή, επειδή ισχύουν οι σχέσεις $(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}) = 1$, $(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}) = (\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}) = 0$,

$$dW = \frac{Qq}{4\pi\epsilon}\frac{dr}{r^2}. \tag{1.72}$$

Συνεπώς, το έργο W_{AB} κατά τη μετακίνηση του φορτίου q από το σημείο A μέχρι το σημείο B είναι

$$W_{AB} = \int_A^B dW = q\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon}\int_A^B \frac{dr}{r^2} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right), \tag{1.73}$$

όπου r_A και r_B είναι οι αποστάσεις των σημείων A και B, αντίστοιχα, από τη θέση O του φορτίου Q.

Από την (1.73) παρατηρούμε ότι το έργο W_{AB} εξαρτάται μόνον από τις αποστάσεις της αρχικής και της τελικής θέσης από την αρχή O, και είναι τελείως ανεξάρτητο από τη διαδρομή AB του φορτίου q.

Στην περίπτωση όπου το φορτίο q ξεκινώντας από το σημείο A επιστρέφει και πάλι σ' αυτό, το έργο W, που δίνεται από την (1.66), όπως φαίνεται από την (1.73) για $r_A = r_B$, είναι

$$W = q\oint_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_A}\right) = 0. \tag{1.74}$$

Το έργο, συνεπώς, του πεδίου κατά τη μετακίνηση του φορτίου q σε οποιαδήποτε κλειστή διαδρομή είναι πάντοτε ίσο με μηδέν.

Το συμπέρασμα αυτό επεκτείνεται, με βάση την αρχή της υπέρθεσης, και σε κάθε πεδίο που προέρχεται όχι μόνον από ένα σημειακό φορτίο, αλλά από οποιαδήποτε σημειακά ή/και διανεμημένα φορτία.

Πράγματι, στην περίπτωση αυτή, η ηλεκτρική πεδιακή ένταση $\boldsymbol{E}$ μπορεί, σύμφωνα με την αρχή της υπέρθεσης, να θεωρηθεί ως η συνισταμένη όλων των επιμέρους εντάσεων $\boldsymbol{E}_i$ (πεπερασμένων ή απειροστών, που προέρχονται από όλα τα σημειακά και απειροστά φορτία $\rho_\ell d\ell'$, $\rho_s dS'$, $\rho dV'$ που, επίσης, μπορούν να θεωρηθούν ως σημειακά φορτία) του συστήματος

$$\boldsymbol{E} = \sum_i \boldsymbol{E}_i. \tag{1.75}$$

Το έργο, συνεπώς, W των πεδιακών δυνάμεων κατά τη μετακίνηση του δοκιμαστικού φορτίου q πάνω στην τυχούσα κλειστή καμπύλη c είναι, σύμφωνα με τις (1.66) και (1.75),

$$W = q\oint_c \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{\ell} = q\oint_c \sum_i \boldsymbol{E}_i \cdot d\boldsymbol{\ell} = q\sum_i \oint_c \boldsymbol{E}_i \cdot d\boldsymbol{\ell}. \tag{1.76}$$

Αλλά το άθροισμα στο δεξιό μέλος της (1.76) είναι ίσο με μηδέν, αφού κάθε όρος του αθροίσματος αναφέρεται στην ένταση ενός μόνο σημειακού φορτίου που, όπως είδαμε προηγουμένως (σχέση (1.74)), είναι επίσης ίσος με μηδέν. Έτσι, από την (1.76), συμπεραίνουμε ότι και σε κάθε πεδίο που προέρχεται από οποιαδήποτε ακίνητα φορτία ισχύει η σχέση

$$W = \oint_c \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\ell} = q\oint_c \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{\ell} = 0. \tag{1.77}$$

Από την (1.77), επειδή το δοκιμαστικό φορτίο q έχει μη μηδενική τιμή, προκύπτει η

$$\boxed{\oint_c \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{\ell} = 0} \tag{1.78}$$

Το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στην (1.78) εκφράζει την **κυκλοφορία** της ηλεκτρικής πεδιακής έντασης, ή, όπως θα δούμε στη συνέχεια, την **ηλεκτρική περιμετρική τάση** κατά μήκος της τυχούσας κλειστής καμπύλης c.

Όπως είναι γνωστό από τη μαθηματική φυσική, τα διανυσματικά πεδία, στα οποία η κυκλοφορία του χαρακτηριστικού τους διανύσματος είναι μηδέν κατά μήκος οποιασδήποτε κλειστής καμπύλης, ονομάζονται **αστρόβιλα** ή **συντηρητικά πεδία**. Τα μη αστρόβιλα πεδία ονομάζονται **στροβιλά** ή **μη συντηρητικά**.

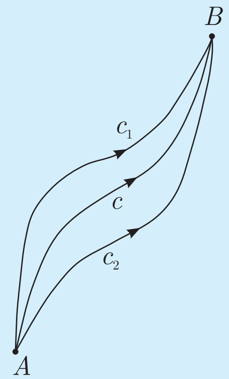
Το ηλεκτροστατικό, επομένως, πεδίο είναι **αστρόβιλο** (irrotational, conservative), και η (1.78) εκφράζει – υπό *ολοκληρω(μα)τική* μορφή – τον θεμελιώδη νόμο (ή ιδιότητα) του αστροβίλου του ηλεκτροστατικού πεδίου.

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι σ' ένα τυχόν ηλεκτροστατικό πεδίο το δοκιμαστικό φορτίο q μετακινείται από μια αρχική θέση A σε μια τελική θέση B κατά μήκος της τυχούσας καμπύλης c_1. Αν W_1 είναι το έργο των πεδιακών δυνάμεων κατά τη μετακίνηση αυτή, σύμφωνα με την (1.65), έχουμε

$$W_1 = q\int_{A(c_1)}^{B} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{\ell}. \tag{1.79}$$

Παρόμοια, το έργο W_2 των πεδιακών δυνάμεων στην περίπτωση που η μετακίνηση γίνει από τη θέση A στη θέση B κατά μήκος της, επίσης, τυχούσας καμπύλης c_2, δίνεται από τη σχέση

$$W_2 = q\int_{A(c_2)}^{B} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{\ell}. \tag{1.80}$$



ΣΧΗΜΑ 1.12: Ανεξαρτησία από τον δρόμο.

Στη συνέχεια, θεωρούμε ότι το φορτίο q μετακινείται αρχικά από τη θέση A στη B κατά μήκος της c_1, και μετά από τη θέση B επιστρέφει πάλι στην αρχική θέση A διανύοντας την καμπύλη c_2 κατά την αντίστροφη, όμως, φορά από εκείνην που δείχνει το Σχήμα 1.12. Αν η κλειστή αυτή διαδρομή συμβολιστεί με c_{12}, από την (1.77), με 'σπάσιμο' του κλειστού επικαμπύλιου ολοκληρώματος στα μερικά επικαμπύλια ολοκληρώματα πάνω στα τμήματα c_1 και c_2 έχουμε

$$q \oint_{c_{12}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = q \left(\int_{A(c_1)}^{B} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_{B(c_2)}^{A} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} \right) = 0. \tag{1.81}$$

Η (1.81), με αντιμετάθεση των ορίων του τελευταίου ολοκληρώματος, οπότε αυτό αλλάζει πρόσημο, γράφεται

$$q \left(\int_{A(c_1)}^{B} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} - \int_{A(c_2)}^{B} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} \right) = 0, \tag{1.82}$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$\int_{A(c_1)}^{B} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_{A(c_2)}^{B} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} \tag{1.83}$$

ή, λόγω των (1.79), (1.80),

$$W_1 = W_2. \tag{1.84}$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι το έργο των πεδιακών δυνάμεων κατά τη μετακίνηση του φορτίου q από τη θέση A στη θέση B είναι το ίδιο για δύο τυχούσες διαφορετικές διαδρομές, επομένως, είναι το ίδιο και για οποιαδήποτε άλλη διαδρομή από τη θέση A μέχρι τη θέση B.

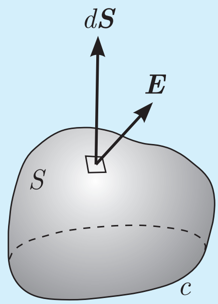
Έτσι, κατά τη μετακίνηση του φορτίου q από το σημείο A μέχρι το σημείο B, το έργο W_{AB} είναι **ανεξάρτητο** της ακολουθούμενης διαδρομής και εξαρτάται μόνον από τις θέσεις των A και B και την τιμή q. Το έργο αυτό, επειδή σύμφωνα με τα παραπάνω περιττεύει η αναγραφή της διαδρομής, γράφεται

$$W_{AB} = q\int_{A(c_1)}^{B} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{\ell} = q\int_{A(c_2)}^{B} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{\ell} = q\int_{A(c)}^{B} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{\ell}, \tag{1.85}$$

όπου c τυχούσα διαδρομή από το A μέχρι το B.

1.12 Η περιστροφή της ηλεκτρικής έντασης $\boldsymbol{E}$

Όπως ήδη αναφέραμε, η (1.78) αποτελεί τη μαθηματική διατύπωση – υπό μορφή ολοκληρώματος – του νόμου του αστροβίλου. Ας ζητήσουμε, στη συνέχεια, τη διαφορική διατύπωση του ίδιου νόμου. Προς τον σκοπό αυτό, ας θεωρήσουμε σ' ένα ηλεκτροστατικό πεδίο την τυχούσα ανοιχτή επιφάνεια S (Σχήμα 1.13), που έχει ως περίγραμμα την κλειστή καμπύλη c.



ΣΧΗΜΑ 1.13: Η ανοικτή επιφάνεια S και το περίγραμμά της c.

Στην κλειστή καμπύλη c, σύμφωνα με τον νόμο του αστροβίλου, ισχύει η

$$\oint_c \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{\ell} = 0. \tag{1.86}$$

Η (1.86), αν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μετασχηματιστεί σε επιφανειακό, σύμφωνα με το γνωστό θεώρημα του Stokes

$$\oint_c \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot d\boldsymbol{S} = 0, \tag{1.87}$$

γράφεται

$$\int_S (\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot d\boldsymbol{S} = 0. \tag{1.88}$$

Το διανυσματικό μέγεθος $\nabla \times \boldsymbol{E}$ που συμβολίζεται επίσης και ως

$$\boxed{\nabla \times \boldsymbol{E} \equiv \operatorname{curl} \boldsymbol{E} \equiv \operatorname{rot} \boldsymbol{E}} \tag{1.89}$$

ονομάζεται **περιστροφή, ή στροφή, ή στροβιλισμός** (rotation) του $\boldsymbol{E}$ και ορίζεται, μονοσήμαντα σε κάθε σημείο P, από τη σχέση

$$\boxed{\nabla \times \boldsymbol{E} \triangleq \left(\lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_c \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} \right)_{\max} \hat{\boldsymbol{n}}} \tag{1.90}$$

όπου ΔS απειροστό επιφανειακό στοιχείο που έχει ως περίγραμμα την κλειστή επίπεδη καμπύλη c και περιέχει το σημείο P, και $\hat{\boldsymbol{n}}$ μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια ΔS που η φορά του καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία. Η διαδικασία συρρίκνωσης της ΔS στο όριο της (1.90) νοείται έτσι, ώστε η μέγιστή της χορδή να τείνει στο μηδέν. Το επίπεδο της καμπύλης c πρέπει να πάρει τέτοιον προσανατολισμό, ώστε το μέτρο του διανύσματος να γίνει μέγιστο.

Ο ορισμός αυτός της περιστροφής εμφανίζει, βεβαίως, το πλεονέκτημα ότι είναι απαλλαγμένος από τα διάφορα συστήματα συντεταγμένων **(αναλλοίωτο της περιστροφής)**, ενώ συγχρόνως παρέχει τη δυνατότητα κάποιας κατανόησης του φυσικού μηχανισμού που εκφράζει. Εντούτοις, όπως είναι προφανές, δεν καθιστά ευχερή τη χρησιμοποίηση της περιστροφής – με τη μορφή αυτή – στα περισσότερα προβλήματα της διανυσματικής ανάλυσης.

Γι' αυτό, κρίνεται προτιμότερη η αντικατάσταση της έκφρασης στο δεύτερο μέλος της (1.90) από τις ισοδύναμες εκφράσεις που προκύπτουν στα διάφορα συστήματα συντεταγμένων. Οι ισοδύναμες αυτές εκφράσεις, που μπορούν να ληφθούν και ως βασικές σχέσεις ορισμού της περιστροφής, στα τρία συνηθέστερα συστήματα συντεταγμένων είναι οι ακόλουθες:

α) Καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{E} \equiv \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \hat{\boldsymbol{x}} \\ + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \hat{\boldsymbol{y}} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{\boldsymbol{z}} \end{aligned}} \tag{1.91}$$

όπου E_x, E_y, E_z είναι οι συνιστώσες του διανύσματος $\boldsymbol{E}$ κατά τις διευθύνσεις των τριών μοναδιαίων διανυσμάτων $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}$ και x, y, z οι αντίστοιχες συντεταγμένες του τυχόντος σημείου P.

β) Κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{E} \equiv & \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} \\ & + \left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho E_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\end{aligned}} \tag{1.92}$$

όπου E_ρ, E_φ, E_z είναι οι συνιστώσες του διανύσματος $\boldsymbol{E}$ κατά τις διευθύνσεις των τριών μοναδιαίων διανυσμάτων $\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \hat{\boldsymbol{z}}$ και ρ, ϕ, z οι αντίστοιχες συντεταγμένες του σημείου P.

γ) Σφαιρικές συντεταγμένες

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{E} \equiv & \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta E_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial \varphi}\right)\hat{\boldsymbol{r}} \\ & + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}\end{aligned}} \tag{1.93}$$

όπου E_r, E_θ, E_φ είναι οι συνιστώσες του διανύσματος $\boldsymbol{E}$ κατά τις διευθύνσεις των τριών μοναδιαίων διανυσμάτων $\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}}$ και r, θ, φ οι αντίστοιχες συντεταγμένες του σημείου P.

Όπως παρατηρούμε, οι (1.91), (1.92), (1.93) παρέχουν τη δυνατότητα άμεσου υπολογισμού της περιστροφής σ' οποιοδήποτε σημείο του χώρου, όταν δίνεται – ως συνάρτηση των αντίστοιχων συντεταγμένων – η διανυσματική συνάρτηση $\boldsymbol{E}$.

Ας επανέλθουμε, τώρα, και πάλι στην (1.88), η οποία ισχύει για τυχούσα ανοιχτή επιφάνεια S, οποιουδήποτε σχήματος και μεγέθους. Πρέπει, επομένως, σε κάθε θέση του πεδίου να ισχύει η σχέση

$$\boxed{\nabla \times \boldsymbol{E} = \mathbf{0}} \tag{1.94}$$

γιατί αν υποτεθεί ότι σε κάποιο σημείο P είχαμε $\nabla \times \boldsymbol{E} \neq \mathbf{0}$, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε μια πάρα πολύ μικρή επίπεδη επιφάνεια S που θα περιείχε το σημείο P, και στην οποία, όπως είναι προφανές, δεν θα ίσχυε η (1.88).

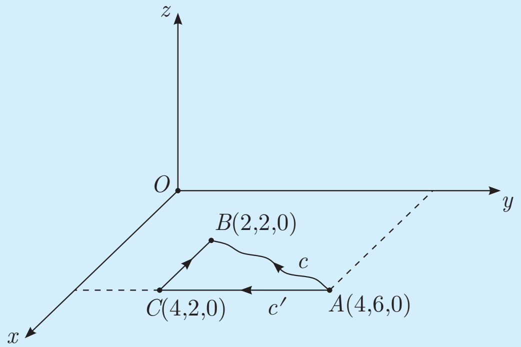
Η (1.94) εκφράζει υπό *διαφορική μορφή* τον νόμο του αστροβίλου του ηλεκτροστατικού πεδίου. Η ισοδύναμη ολοκληρωτική διατύπωση δίνεται, όπως είδαμε, από την (1.78).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.6

Αφού δειχτεί ότι η διανυσματική συνάρτηση

$$\boldsymbol{E} = y\hat{\boldsymbol{x}} + x\hat{\boldsymbol{y}}$$

μπορεί να εκφράζει την ηλεκτρική ένταση κάποιου ηλεκτροστατικού πεδίου, να υπολογιστεί το έργο των πεδιακών δυνάμεων κατά τη μετακίνηση ενός σημειακού φορτίου $q = 2$ μC από τη θέση $A(4, 6, 0)$ στη θέση $B(2, 2, 0)$.



Σχημα 1.14: Υπολογισμός του έργου των πεδιακών δυνάμεων.

Για να μπορεί η δοθείσα διανυσματική συνάρτηση να εκφράζει την ηλεκτρική πεδιακή ένταση κάποιου ηλεκτροστατικού πεδίου, θα πρέπει, σύμφωνα με τη διαφορική διατύπωση του νόμου του αστροβίλου, η περιστροφή

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{x}} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{y}} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$$

της δοθείσας διανυσματικής συνάρτησης να είναι ίση με μηδέν.

Πράγματι, με αντικατάσταση της έκφρασης της $\boldsymbol{E}$, εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{E} &= \left[\frac{\partial(0)}{\partial y} - \frac{\partial(x)}{\partial z}\right]\hat{\boldsymbol{x}} + \left[\frac{\partial(y)}{\partial z} - \frac{\partial(0)}{\partial x}\right]\hat{\boldsymbol{y}} + \left[\frac{\partial(x)}{\partial x} - \frac{\partial(y)}{\partial y}\right]\hat{\boldsymbol{z}} \\ &= (0-0)\hat{\boldsymbol{x}} + (0-0)\hat{\boldsymbol{y}} + (1-1)\hat{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{0}. \qquad \text{(i)}\end{aligned}$$

Αφού, λοιπόν, το θεωρούμενο πεδίο είναι αστρόβιλο, το έργο W_{AB} των πεδιακών δυνάμεων υπολογίζεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$W_{AB} = q\int_{A(c)}^{B} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{\ell}, \qquad \text{(ii)}$$

όπου c είναι οποιαδήποτε καμπύλη που έχει ως αρχή το A και πέρας το B.

Αν αντί της διαδρομής c επιλεγεί η διαδρομή c' του Σχήματος 1.14, το ζητούμενο έργο, επειδή η απειροστή μετατόπιση $d\boldsymbol{\ell}$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι

$$d\boldsymbol{\ell} = dx\hat{\boldsymbol{x}} + dy\hat{\boldsymbol{y}} + dz\hat{\boldsymbol{z}}, \qquad \text{(iii)}$$