5 Εφαρμογές των ολοκληρωμάτων

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ Πολλές από τις ποσότητες που μας ενδιαφέρουν μπορούν να υπολογιστούν μέσω ολοκληρωμάτων: όγκοι στερεών, μήκη καμπυλών, το έργο που απαιτείται για να αντλήσουμε κάποιο υγρό (π.χ. πετρέλαιο) από το υπέδαφος, οι δυνάμεις που ασκούνται σε υδατοφράκτες, οι συντεταγμένες των σημείων ισορροπίας στερεών αντικειμένων, κ.ά. Όλες αυτές τις ποσότητες τις ορίζουμε ως όρια αθροισμάτων Riemann συνεχών συναρτήσεων σε κλειστά διαστήματα —με άλλα λόγια, ως ολοκληρώματα— και υπολογίζουμε τα όρια αυτά με τις μεθόδους του απειροστικού λογισμού.

5.1 Υπολογισμός όγκων με διατμήσεις και περιστροφή γύρω από άξονα

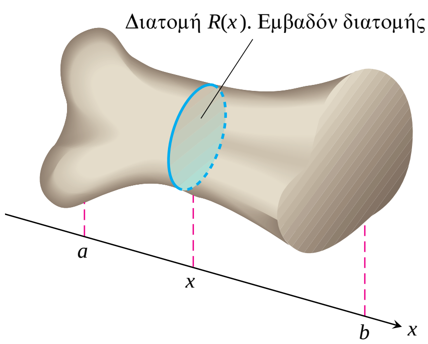
Υπολογισμός όγκων με διατμήσεις • Στερεά εκ περιστροφής: Κυκλικές διατομές • Στερεά εκ περιστροφής: Δακτυλιοειδείς διατομές

Στην Ενότητα 4.3, Παράδειγμα 3, υπολογίσουμε τον όγκο σφαίρας διαμερίζοντάς την σε λεπτές «φέτες» σχεδόν κυλινδρικού σχήματος και αθροίζοντας τους όγκους των κυλίνδρων, οπότε καταλήξαμε να υπολογίζουμε ένα άθροισμα Riemann. Αν είχαμε τις τωρινές μας γνώσεις στο σημείο εκείνο, θα συνεχίζαμε εκφράζοντας τον όγκο της σφαίρας ως ένα ορισμένο ολοκλήρωμα.

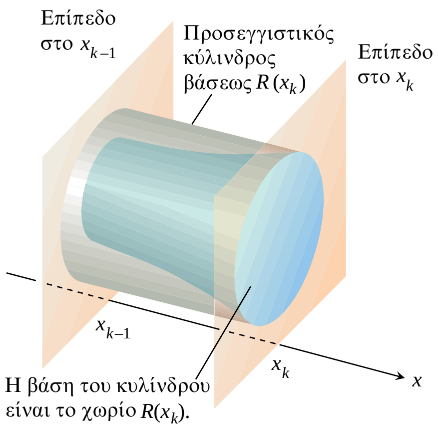
Τώρα είμαστε σε θέση να υπολογίζουμε τον όγκο μιας μεγάλης ποικιλίας στερεών, με ολοκληρώματα.

Υπολογισμός όγκων με διατμήσεις

Έστω ότι ζητούμε να υπολογίσουμε τον όγκο του στερεού του Σχήματος 5.1. Η διατομή του στερεού σε κάθε σημείο x του διαστήματος $[a, b]$ είναι ένα χωρίο $R(x)$ εμβαδού $A(x)$. Αν το A είναι συνεχής συνάρτηση του x, μπορούμε να ορίσουμε τον όγκο του στερεού ως ολοκλήρωμα, που υπολογίζεται ως ακολούθως.



Σχημα 5.1 Αν το εμβαδόν $A(x)$ της διατομής $R(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση του x, μπορούμε να υπολογίσουμε τον όγκο του στερεού ολοκληρώνοντας το $A(x)$ από a έως b.



Σχημα 5.2 Μεγέθυνση της «φέτας» που «κόβουν» από το στερεό τα επίπεδα x_{k-1} και x_k. Φαίνεται επίσης ο κύλινδρος που προσεγγίζει τη φέτα του στερεού.

Διαμερίζουμε το $[a, b]$ σε υποδιαστήματα μήκους Δx και «κόβουμε» σε «φέτες» το στερεό, όπως θα κόβαμε ένα καρβέλι ψωμί, με επίπεδα κάθετα στον άξονα x στα σημεία διαμερίσεως. Η k-στή φέτα, η οποία περιέχεται μεταξύ των επιπέδων που διέρχονται από τα x_{k-1} και x_k, έχει περίπου ίσον όγκο με τον κύλινδρο που κείται μεταξύ των ίδιων επιπέδων και έχει ως βάση το χωρίο $R(x_k)$ (Σχήμα 5.2).

Ο όγκος του κυλίνδρου είναι

$$V_k = \text{εμβαδόν βάσης} \times \text{ύψος} = A(x_k) \times \Delta x .$$

Το άθροισμα

$$\sum V_k = \sum A(x_k) \times \Delta x$$

προσεγγίζει τον όγκο του στερεού.

Το παραπάνω δεν είναι παρά ένα άθροισμα Riemann της συνάρτησης $A(x)$ στο διάστημα $[a, b]$, καθώς οι λεπτότητες των διαμερίσεων τείνουν στο μηδέν, αναμένουμε να βελτιώνονται οι προσεγγίσεις και έτσι ορίζουμε το ολοκλήρωμα που αποτελεί όριό τους ως τον *όγκο του στερεού*.

Ορισμός Όγκος στερεού

Ο **όγκος** στερεού με γνωστό και ολοκληρώσιμο εμβαδόν διατομής $A(x)$ από $x = a$ έως $x = b$ ισούται με το ολοκλήρωμα της συνάρτησης A από a έως b,

$$V = \int_a^b A(x)\, dx .$$

CD-ROM
Δικτυότοπος

Για να εφαρμόσουμε τον τύπο αυτόν κινούμαστε ως εξής:

Πώς υπολογίζουμε όγκους με τη μέθοδο των διατμήσεων

Βήμα 1. *Σχεδιάζουμε το στερεό και μια τυπική διατομή του.*

Βήμα 2. *Βρίσκουμε μια έκφραση της* $A(x)$.

Βήμα 3. *Βρίσκουμε τα όρια ολοκλήρωσης.*

Βήμα 4. *Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση* $A(x)$, *για να βρούμε τον όγκο.*

Παράδειγμα 1 Όγκος πυραμίδας

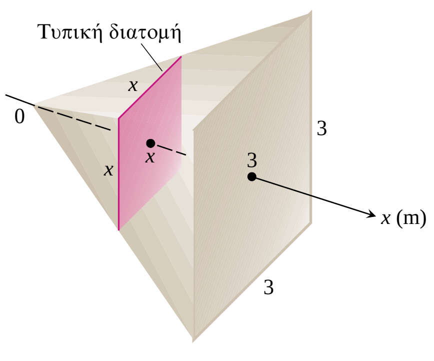
Μια πυραμίδα ύψους 3 m έχει τετράγωνη βάση πλευράς 3 m. Η διατομή της πυραμίδας σε απόσταση x m από την κορυφή της είναι ένα τετράγωνο πλευράς x m. Βρείτε τον όγκο της πυραμίδας.

Λύση

Βήμα 1: *Σκαρίφημα.* Σχεδιάζουμε την πυραμίδα με άξονα συμμετρίας τον άξονα x και κορυφή την αρχή των αξόνων, και κατασκευάζουμε μια τυπική διατομή (Σχήμα 5.3).

Βήμα 2: *Έκφραση του* $A(x)$. Η διατομή σε τυχόν x είναι ένα τετράγωνο πλευράς x m, με εμβαδόν

$$A(x) = x^2 .$$



Σχημα 5.3 Οι διατομές της πυραμίδας του Παραδείγματος 1 είναι τετράγωνα.

Βήμα 3: *Όρια ολοκλήρωσης.* Οι τετράγωνες διατομές εκτείνονται από $x = 0$ έως $x = 3$.

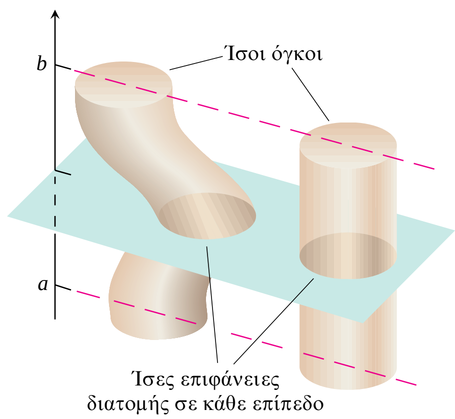
Βήμα 4: *Ολοκληρώνουμε για να βρούμε τον όγκο.*

$$V = \int_0^3 A(x)\,dx = \int_0^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Bigg]_0^3 = 9 \text{ m}^3$$

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Bonaventura Cavalieri
(1598-1647)

Παράδειγμα 2 Το θεώρημα του Cavalieri

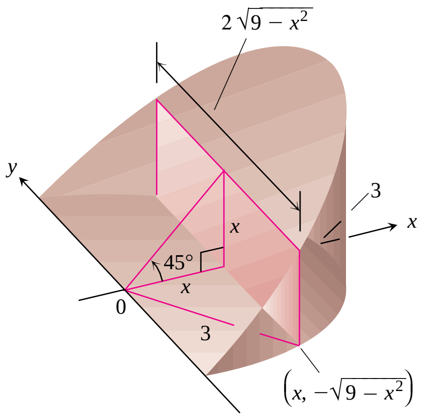
Το θεώρημα του Cavalieri μάς λέει ότι στερεά που έχουν ίσο ύψος και ταυτόσημα εμβαδά διατομής σε κάθε ύψος, καταλαμβάνουν ίσους όγκους (Σχήμα 5.4). Αυτό έπεται αμέσως από τον ορισμό του όγκου, διότι τόσο η συνάρτηση εμβαδού διατομής $A(x)$ όσο και το διάστημα $[a\,,\,b]$ συμπίπτουν για τα δύο στερεά.



Σχημα 5.4 *Το θεώρημα του Cavalieri:* Τα στερεά αυτά έχουν ίσους όγκους. Μπορείτε να πεισθείτε γι' αυτό συγκρίνοντας δυο στοίβες νομισμάτων.

Παράδειγμα 3 Όγκος σφηνοειδούς βαθμίδας

Δύο επίπεδα τέμνουν έναν κύλινδρο ακτίνας 3, αποκόπτοντας από αυτόν τη σφηνοειδή βαθμίδα που φαίνεται στο Σχήμα 5.5. Το ένα επίπεδο είναι κάθετο στον άξονα του κυλίνδρου. Το άλλο επίπεδο τέμνει το πρώτο υπό γωνία 45° στο κέντρο του κυλίνδρου. Υπολογίστε τον όγκο της σφηνοειδούς βαθμίδας.



Σχημα 5.5 Η σφηνοειδής βαθμίδα του Παραδείγματος 3, διατετμημένη κάθετα στον άξονα x. Οι διατομές είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα.

Λύση

Βήμα 1: *Σκαρίφημα.* Σχεδιάζουμε τη σφηνοειδή βαθμίδα και κατασκευάζουμε μια τυπική διατομή κάθετη στον άξονα x (Σχήμα 5.5).

Βήμα 2: *Έκφραση του $A(x)$.* Η διατομή στο x είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο εμβαδού

$$\begin{aligned} A(x) &= (\text{ύψος})(\text{πλάτος}) = (x)\ \left(2\sqrt{9-x^2}\right) \\ &= 2x\sqrt{9-x^2} \ \text{ τετραγωνικές μονάδες.} \end{aligned}$$

Βήμα 3: *Όρια ολοκλήρωσης.* Οι ορθογώνιες διατομές εκτείνονται από $x = 0$ έως $x = 3$.

Βήμα 4: *Ολοκληρώνουμε για να βρούμε τον όγκο.*

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_0^3 2x\sqrt{9-x^2}\,dx$$

$$= -\frac{2}{3}(9-x^2)^{3/2}\Big]_0^3$$

Θέτουμε $u = 9 - x^2$, $du = -2x\,dx$, ολοκληρώνουμε, και εκφράζουμε πάλι ως προς x.

$$= 0 + \frac{2}{3}(9)^{3/2}$$

$$= 18 \text{ κυβικές μονάδες}$$

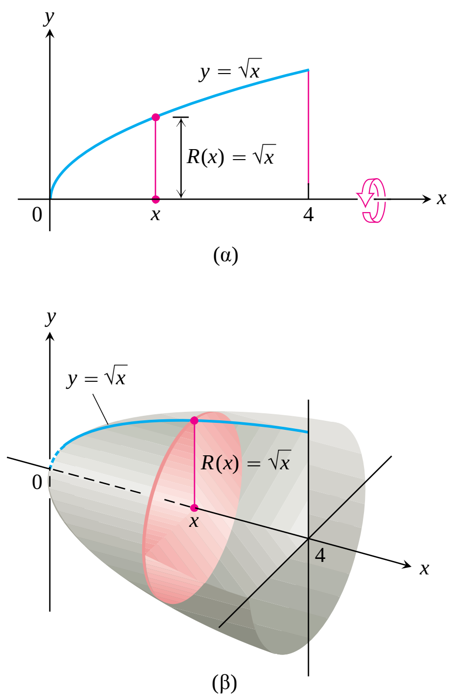
Στερεά εκ περιστροφής: Κυκλικές διατομές

Η κοινότερη εφαρμογή της μεθόδου των διατμήσεων αφορά στερεά εκ περιστροφής. **Στερεά εκ περιστροφής** είναι στερεά των οποίων το σχήμα παράγεται με την περιστροφή των επίπεδων χωρίων γύρω από άξονες. Το μόνο που αλλάζει σε σχέση με πριν είναι η έκφραση του εμβαδού διατομής $A(x)$.

Τώρα, η τυπική διατομή του στερεού σε διεύθυνση κάθετη στον άξονα περιστροφής, είναι ένας δίσκος ακτίνας $R(x)$ και εμβαδού

$$A(x) = \pi(\text{ακτίνα})^2 = \pi[R(x)]^2.$$

Για τον λόγο αυτό, η συγκεκριμένη μέθοδος καλείται ενίοτε και **μέθοδος των δίσκων.** Ακολουθούν μερικά παραδείγματα.



Σχημα 5.6 Το χωρίο (α) και το στερεό (β) του Παραδείγματος 4.

Παράδειγμα 4 Στερεό εκ περιστροφής (Περιστροφή ως προς τον άξονα x)

Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$, και τον άξονα x περιστρέφεται ως προς τον άξονα x σχηματίζοντας ένα στερεό. Βρείτε τον όγκο του.

Λύση Σχεδιάζουμε το χωρίο, μια τυπική ακτίνα, και το παραγόμενο στερεό εκ περιστροφής (Σχήμα 5.6). Ο όγκος ισούται με

$$V = \int_a^b \pi[R(x)]^2\,dx$$

$$= \int_0^4 \pi[\sqrt{x}]^2\,dx \qquad R(x) = \sqrt{x}$$

$$= \pi\int_0^4 x\,dx = \pi\frac{x^2}{2}\Big]_0^4 = \pi\frac{(4)^2}{2} = 8\pi \text{ κυβικές μονάδες.}$$

Στο επόμενο παράδειγμα, άξονας περιστροφής δεν είναι ο άξονας x, ωστόσο η μέθοδος υπολογισμού του όγκου δεν αλλάζει: Ολοκληρώνουμε την ποσότητα $\pi(\text{ακτίνα})^2$, με κατάλληλα όρια ολοκλήρωσης.

Παράδειγμα 5 Στερεό εκ περιστροφής (Περιστροφή ως προς την ευθεία $y = 1$)

Βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται περιστρέφοντας ως προς την ευθεία $y = 1$ το χωρίο που φράσσεται από την $y = \sqrt{x}$ και από τις ευθείες $y = 1$, $x = 4$.

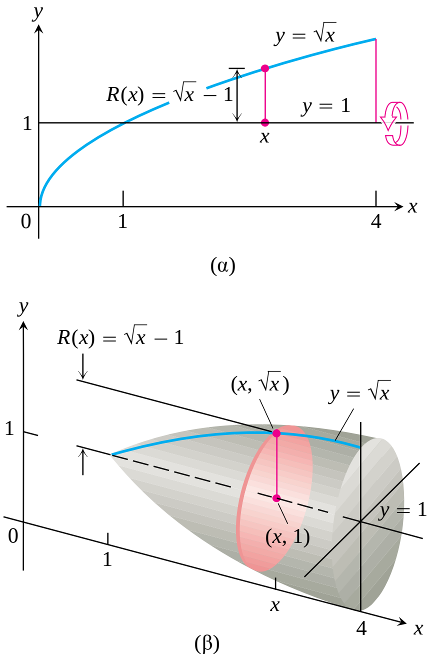
Λύση Σχεδιάζουμε το χωρίο, μια τυπική ακτίνα, και το παραγόμενο στερεό εκ περιστροφής (Σχήμα 5.7). Ο όγκος του ισούται με

$$V = \int_1^4 \pi[R(x)]^2\,dx$$

$$= \int_1^4 \pi\left[\sqrt{x} - 1\right]^2 dx \qquad R(x) = \sqrt{x} - 1$$

$$= \pi \int_1^4 \left[x - 2\sqrt{x} + 1\right] dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - 2 \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} + x\right]_1^4 = \frac{7\pi}{6} \text{ κυβικές μονάδες.}$$



Σχημα 5.7 Το χωρίο (α) και το στερεό (β) του Παραδείγματος 5.

Εύρεση όγκων για κυκλικές διατομές (μέθοδος των δίσκων)

CD-ROM Δικτυότοπος

Βήμα 1. *Σχεδιάζουμε το χωρίο και βρίσκουμε τη συνάρτηση ακτίνας* $R(x)$.

Βήμα 2. *Τετραγωνίζουμε την* $R(x)$ *και πολλαπλασιάζουμε με* π.

Βήμα 3. *Ολοκληρώνουμε* για να βρούμε τον όγκο.

Για να βρούμε τον όγκο που παράγεται αν περιστρέψουμε ως προς τον άξονα y ένα χωρίο που περικλείεται από τον άξονα y και την καμπύλη $x = R(y)$, $c \le y \le d$, εφαρμόζουμε την ίδια μέθοδο αλλά με το x στη θέση του y. Στην περίπτωση αυτή, η κυκλική διατομή έχει εμβαδόν

$$A(y) = \pi[\text{ακτίνα}]^2 = \pi[R(y)]^2.$$

Παράδειγμα 6 Περιστροφή ως προς τον άξονα y

Βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε ως προς τον άξονα y το χωρίο που περικλείεται από τον άξονα y και από την καμπύλη $x = 2/y$, $1 \le y \le 4$.

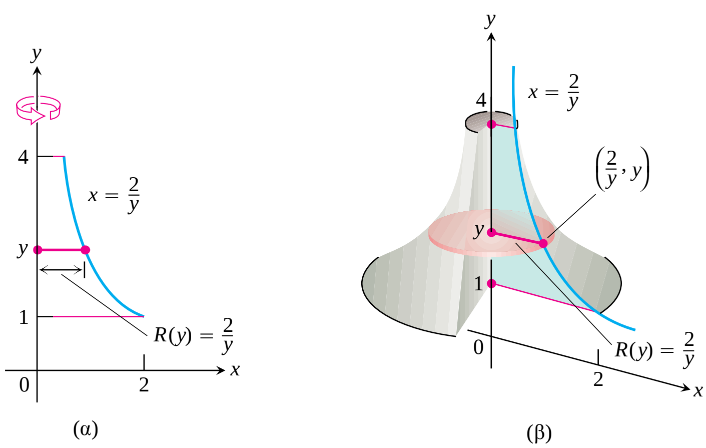
Λύση Σχεδιάζουμε το χωρίο, μια τυπική ακτίνα, και το παραγόμενο στερεό εκ περιστροφής (Σχήμα 5.8). Ο όγκος ισούται με

$$V = \int_1^4 \pi[R(y)]^2 \, dy$$

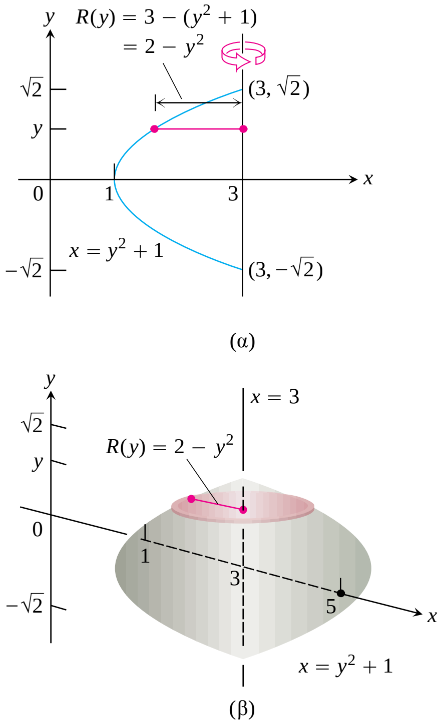
$$= \int_1^4 \pi \left(\frac{2}{y}\right)^2 dy \qquad R(y) = \frac{2}{y}$$

$$= \pi \int_1^4 \frac{4}{y^2} dy = 4\pi \left[-\frac{1}{y}\right]_1^4 = 4\pi \left[\frac{3}{4}\right]$$

$$= 3\pi \text{ κυβικές μονάδες}$$



Σχημα 5.8 Το χωρίο (α) και το στερεό (β) του Παραδείγματος 6.



Σχημα 5.9 Το χωρίο (α) και το στερεό (β) του Παραδείγματος 7.

Παράδειγμα 7 Περιστροφή ως προς κατακόρυφο άξονα

Βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε ως προς την ευθεία $x = 3$ το χωρίο που περικλείεται από την παραβολή $x = y^2 + 1$ και από την ευθεία $x = 3$.

Λύση Σχεδιάζουμε το χωρίο, μια τυπική ακτίνα, και το παραγόμενο στερεό εκ περιστροφής (Σχήμα 5.9). Ο όγκος ισούται με

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi[R(y)]^2\, dy \\
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi[2 - y^2]^2\, dy \qquad R(y) = 3 - (y^2 + 1) = 2 - y^2 \\
&= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [4 - 4y^2 + y^4]\, dy \\
&= \pi \left[4y - \frac{4}{3}y^3 + \frac{y^5}{5} \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{64\pi\sqrt{2}}{15} \text{ κυβικές μονάδες.}
\end{aligned}$$

Στερεά εκ περιστροφής: Δακτυλιοειδείς διατομές

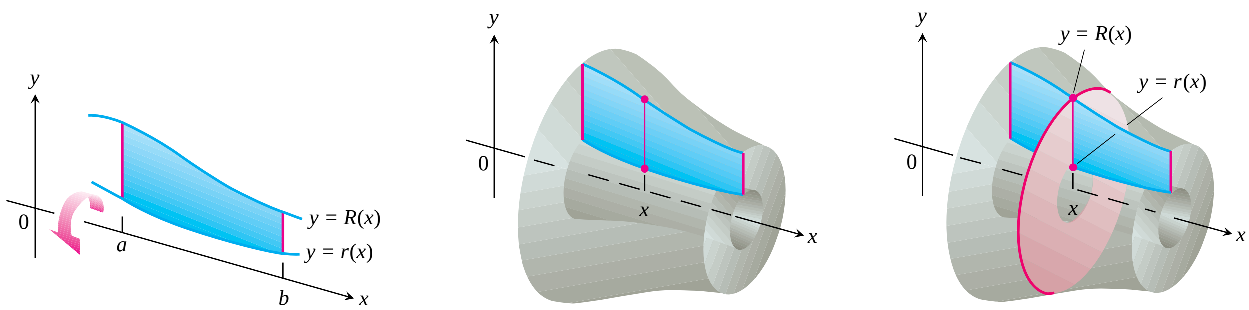
Αν το περιστρεφόμενο χωρίο δεν τέμνει ούτε συνορεύει με τον άξονα περιστροφής, τότε το στερεό παρουσιάζει μια εσωτερική διαμπερή κοιλότητα (είναι «κούφιο») (Σχήμα 5.10). Οι κάθετες στον άξονα περιστροφής διατομές είναι κυκλικοί δακτύλιοι και όχι κυκλικοί δίσκοι. Οι διαστάσεις ενός τυπικού δακτυλίου είναι

Εξωτερική ακτίνα: $R(x)$

Εσωτερική ακτίνα: $r(x)$

Το εμβαδόν κάθε κυκλικού δακτυλίου είναι

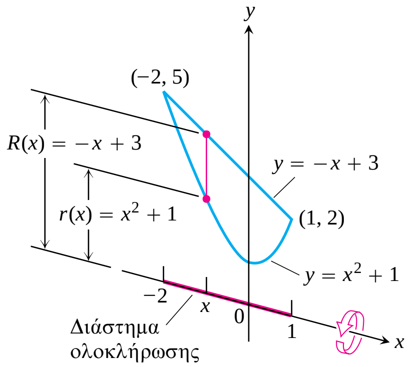
$$A(x) = \pi[R(x)]^2 - \pi[r(x)]^2 = \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,.$$



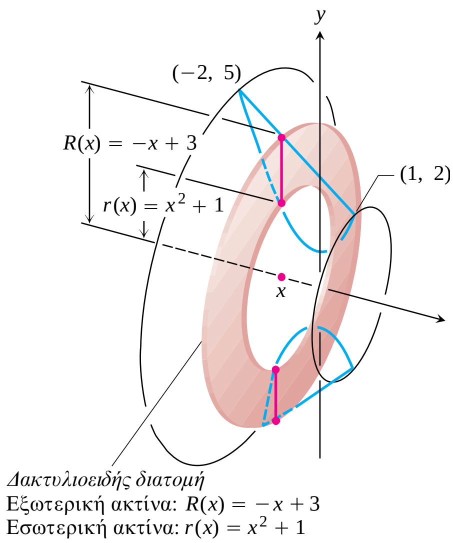
Σχημα 5.10 Οι διατομές του στερεού εκ περιστροφής εδώ είναι κυκλικοί δακτύλιοι, όχι δίσκοι, κι έτσι το ολοκλήρωμα $\int_a^b A(x)\, dx$ καταλήγει σε διαφορετική μαθηματική έκφραση απ' ό,τι παίρναμε ώς τώρα.

Παράδειγμα 8 Δακτυλιοειδής διατομή (Περιστροφή ως προς τον άξονα x)

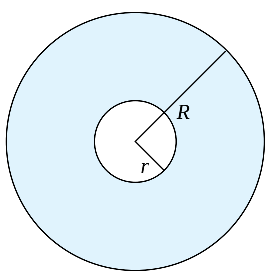
Το χωρίο που φράσσεται από την καμπύλη $y = x^2 + 1$ και την ευθεία $y = -x + 3$ περιστρέφεται ως προς τον άξονα x. Βρείτε τον όγκο του στερεού εκ περιστροφής.



Σχημα 5.11 Το χωρίο του Παραδείγματος 8, καθώς διατρέχεται από ένα ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στον άξονα περιστροφής. Με την περιστροφή του χωρίου ως προς τον άξονα x, το ευθύγραμμο τμήμα σαρώνει την επιφάνεια ενός κυκλικού δακτυλίου.



Σχημα 5.12 Η εσωτερική και η εξωτερική ακτίνα του δακτυλίου που σαρώνεται από το ευθύγραμμο τμήμα του Σχήματος 5.11.



Το εμβαδόν του δακτυλίου είναι $\pi R^2 - \pi r^2$.

Λύση

Βήμα 1: Σχεδιάζουμε το χωρίο καθώς και ένα ευθύγραμμο τμήμα που το διατρέχει κάθετα στον άξονα περιστροφής (στο Σχήμα 5.11, το ευθύγραμμο τμήμα είναι κόκκινο).

Βήμα 2: Βρίσκουμε τα όρια ολοκλήρωσης προσδιορίζοντας τις συντεταγμένες x των σημείων τομής της καμπύλης με το ευθύγραμμο τμήμα (Σχήμα 5.11).

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= -x + 3 \\ x^2 + x - 2 &= 0 \\ (x+2)(x-1) &= 0 \\ x = -2, \qquad x &= 1 \end{aligned}$$

Βήμα 3: Βρίσκουμε την εξωτερική και την εσωτερική ακτίνα της δακτυλιοειδούς διατομής που σαρώνεται από το ευθύγραμμο τμήμα αν αυτό περιστραφεί ως προς τον άξονα x. (Στο Σχήμα 5.12 σχεδιάσαμε τη διατομή, αλλά εσείς δεν είναι απαραίτητο να το κάνετε αυτό όταν λύνετε ασκήσεις.) Οι ακτίνες αυτές ορίζονται αντίστοιχα από τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση των άκρων του ευθύγραμμου τμήματος από τον άξονα περιστροφής.

$$\text{Εξωτερική ακτίνα:} \qquad R(x) = -x + 3$$

$$\text{Εσωτερική ακτίνα:} \qquad r(x) = x^2 + 1$$

Βήμα 4: Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα όγκου.

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,dx && \text{Οι τιμές που βρήκαμε στα βήματα 2 και 3} \\ &= \int_{-2}^{1} \pi((-x+3)^2 - (x^2+1)^2)\,dx && \text{Υψώνουμε στο τετράγωνο και αναδιατάσσουμε} \\ &= \int_{-2}^{1} \pi(8 - 6x - x^2 - x^4)\,dx \\ &= \pi\left[8x - 3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{1} = \frac{117\pi}{5} \text{ κυβικές μονάδες.} \end{aligned}$$

Για την εύρεση όγκου στερεού που παράγεται κατά την περιστροφή ως προς τον άξονα y, χρησιμοποιούμε την ίδια διαδικασία, αλλά ολοκληρώνουμε ως προς y αντί ως προς x.

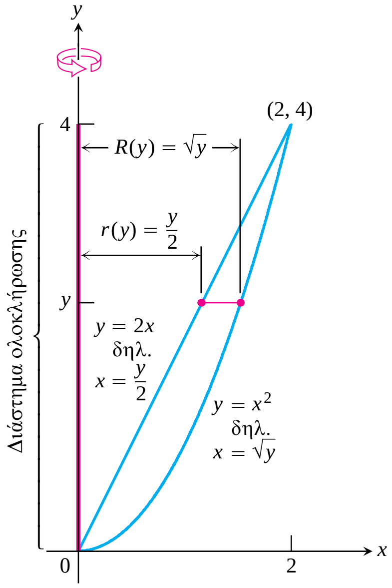
Πώς βρίσκουμε όγκους στερεών με δακτυλιοειδείς διατομές

Βήμα 1. *Σχεδιάζουμε το χωρίο, καθώς και ένα ευθύγραμμο τμήμα που το διατρέχει και είναι κάθετο στον άξονα περιστροφής.* Καθώς το χωρίο περιστρέφεται, το ευθύγραμμο τμήμα θα διαγράψει μια τυπική δακτυλιοειδή διατομή του παραγόμενου στερεού.

Βήμα 2. *Βρίσκουμε τα όρια ολοκλήρωσης.*

Βήμα 3. *Βρίσκουμε την εξωτερική και την εσωτερική ακτίνα του δακτυλίου που σαρώνει το ευθύγραμμο τμήμα.*

Βήμα 4. *Ολοκληρώνουμε,* για να βρούμε τον όγκο.



Σχημα 5.13 Το χωρίο, τα όρια ολοκλήρωσης, και οι ακτίνες του δακτυλίου του Παραδείγματος 9.

Παράδειγμα 9 Δακτυλιοειδής διατομή (περιστροφή ως προς τον άξονα y)

Το χωρίο που φράσσεται από την παραβολή $y=x^2$ και την ευθεία $y = 2x$ στο πρώτο τεταρτημόριο περιστρέφεται ως προς τον άξονα y. Βρείτε τον όγκο του παραγόμενου στερεού.

Λύση

Βήμα 1: Σχεδιάζουμε το χωρίο, καθώς και ένα ευθύγραμμο τμήμα που το διατρέχει κάθετα στον άξονα περιστροφής, ο οποίος στην περίπτωσή μας είναι ο άξονας y (Σχήμα 5.13).

Βήμα 2: Η ευθεία και η παραβολή τέμνονται στα σημεία $y = 0$ και $y = 4$, άρα τα όρια ολοκλήρωσης είναι $c = 0$ και $d = 4$.

Βήμα 3: Οι ακτίνες του δακτυλίου που σαρώνεται από το ευθύγραμμο τμήμα είναι $R(y) = \sqrt{y}$, $r(y) = y/2$ (Σχήματα 5.13 και 5.14).

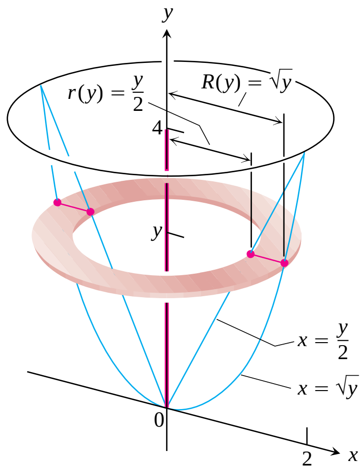
Βήμα 4: Ολοκληρώνουμε για να βρούμε τον όγκο:

$$V = \int_c^d \pi([R(y)]^2 - [r(y)]^2)\, dy$$

$$= \int_0^4 \pi\left(\left[\sqrt{y}\right]^2 - \left[\frac{y}{2}\right]^2\right) dy$$

Οι τιμές που βρήκαμε στα βήματα 2 και 3

$$= \pi \int_0^4 \left(y - \frac{y^2}{4}\right) dy = \pi\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\right]_0^4 = \frac{8}{3}\ \text{κυβικές μονάδες.}$$



Σχημα 5.14 Η δακτυλιοειδής διατομή που σαρώνεται από το ευθύγραμμο τμήμα στο Σχήμα 5.13.

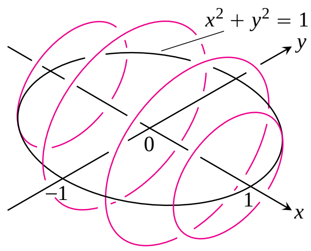
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5.1

Εμβαδά διατομών

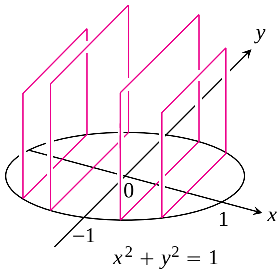
Στις Ασκήσεις 1 και 2, βρείτε έναν τύπο για το εμβαδόν $A(x)$ των διατομών του στερεού που είναι κάθετες στον άξονα x.

1. Το στερεό κείται μεταξύ επιπέδων που τέμνουν κάθετα τον άξονα x στα σημεία $x = -1$ και $x = 1$. Σε όλες τις περιπτώσεις, οι κάθετες στον άξονα x διατομές του στερεού εκτείνονται από το ημικύκλιο $y = -\sqrt{1 - x^2}$ έως το ημικύκλιο $y = \sqrt{1 - x^2}$.

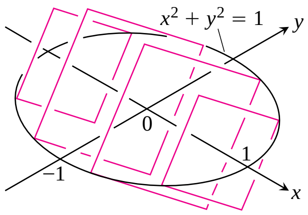
(α) Οι διατομές είναι κυκλικοί δίσκοι που τέμνονται σε ίσα μέρη από το επίπεδο xy.



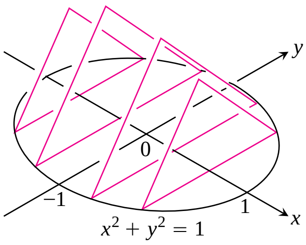
(β) Οι διατομές είναι τετράγωνα με βάσεις που κείνται στο επίπεδο xy.



(γ) Οι διατομές είναι τετράγωνα με διαγωνίους που κείνται στο επίπεδο xy. (Το μήκος της διαγωνίου κάθε τετραγώνου ισούται με $\sqrt{2}$ επί το μήκος της πλευράς.)

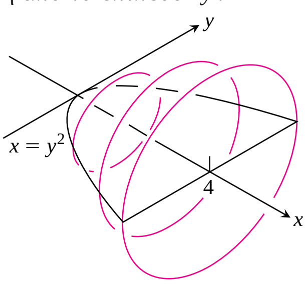


(δ) Οι διατομές είναι ισόπλευρα τρίγωνα με βάσεις που κείνται στο επίπεδο xy.

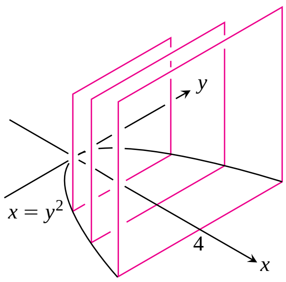


2. Το στερεό κείται μεταξύ επιπέδων που είναι κάθετα στον άξονα x στα σημεία $x = 0$ και $x = 4$. Οι κάθετες στον άξονα x διατομές του στερεού εκτείνονται από την παραβολή $y = -\sqrt{x}$ έως την παραβολή $y = \sqrt{x}$.

(α) Οι διατομές είναι κυκλικοί δίσκοι που τέμνονται σε ίσα μέρη από το επίπεδο xy.



(β) Οι διατομές είναι τετράγωνα με βάσεις που κείνται στο επίπεδο xy.



(γ) Οι διατομές είναι τετράγωνα με διαγωνίους που κείνται στο επίπεδο xy.

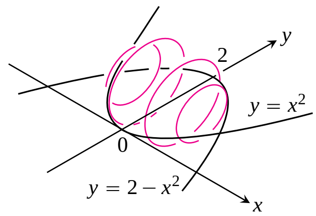
(δ) Οι διατομές είναι ισόπλευρα τρίγωνα με βάσεις που κείνται στο επίπεδο xy.

Υπολογισμός όγκων με διατμήσεις

Βρείτε τους όγκους των στερεών στις Ασκήσεις 3-10.

3. Το στερεό κείται μεταξύ επιπέδων που τέμνουν κάθετα τον άξονα x στα σημεία $x = 0$ και $x = 4$. Οι κάθετες στον άξονα x διατομές του στερεού είναι τετράγωνα με διαγωνίους που εκτείνονται από την παραβολή $y = -\sqrt{x}$ έως την παραβολή $y = \sqrt{x}$.

4. Το στερεό κείται μεταξύ επιπέδων που τέμνουν κάθετα τον άξονα x στα σημεία $x = -1$ και $x = 1$. Οι κάθετες στον άξονα x διατομές του στερεού είναι κυκλικοί δίσκοι με διαμέτρους που εκτείνονται από την παραβολή $y = x^2$ έως την παραβολή $y = 2 - x^2$.

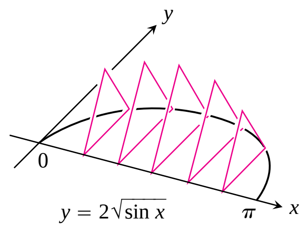


5. Το στερεό κείται μεταξύ επιπέδων που τέμνουν κάθετα τον άξονα x στα σημεία $x = -1$ και $x = 1$. Οι κάθετες στον άξονα x διατομές του στερεού είναι τετράγωνα με βάσεις που εκτείνονται από το ημικύκλιο $y = -\sqrt{1 - x^2}$ έως το ημικύκλιο $y = \sqrt{1 - x^2}$.

6. Το στερεό κείται μεταξύ επιπέδων που τέμνουν κάθετα τον άξονα x στα σημεία $x = -1$ και $x = 1$. Οι κάθετες στον άξονα x διατομές του στερεού είναι τετράγωνα με διαγωνίους που εκτείνονται από το ημικύκλιο $y = -\sqrt{1 - x^2}$ έως το ημικύκλιο $y = \sqrt{1 - x^2}$.

7. Η βάση του στερεού είναι το χωρίο μεταξύ της καμπύλης $y = 2\sqrt{\sin x}$ και του διαστήματος $[0, \pi]$ στον άξονα x. Οι κάθετες στον άξονα x διατομές του στερεού είναι

(α) ισόπλευρα τρίγωνα με βάσεις που εκτείνονται από τον άξονα x έως την καμπύλη, όπως φαίνεται στο σχήμα



(β) τετράγωνα με βάσεις που εκτείνονται από τον άξονα x έως την καμπύλη.

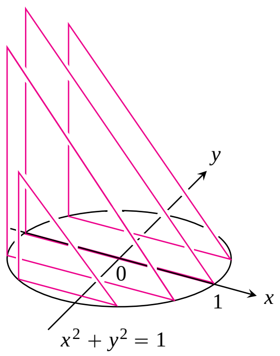
8. Το στερεό κείται μεταξύ επιπέδων που τέμνουν κάθετα τον άξονα x στα σημεία $x = -\pi/3$ και $x = \pi/3$. Οι κάθετες στον άξονα x διατομές του στερεού είναι

(α) κυκλικοί δίσκοι με διαμέτρους που εκτείνονται από την καμπύλη $y = \tan x$ έως την καμπύλη $y = \sec x$

(β) τετράγωνα με βάσεις που εκτείνονται από την καμπύλη $y = \tan x$ έως την καμπύλη $y = \sec x$.

9. Το στερεό κείται μεταξύ επιπέδων που τέμνουν κάθετα τον άξονα y στα σημεία $y = 0$ και $y = 2$. Οι κάθετες στον άξονα y διατομές του στερεού είναι κυκλικοί δίσκοι με διαμέτρους που εκτείνονται από τον άξονα y έως την παραβολή $x = \sqrt{5}\, y^2$.

10. Η βάση του στερεού είναι ο κυκλικός δίσκος $x^2 + y^2 \le 1$. Οι κάθετες στον άξονα y διατομές του στερεού είναι ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα με τη μία τους πλευρά επί του δίσκου.

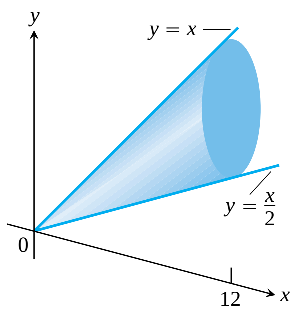


11. *Ένα σπειροειδές στερεό* Ένα τετράγωνο μήκους s κείται σε επίπεδο κάθετο στην ευθεία L. Μια κορυφή του τετραγώνου ανήκει στην ευθεία L. Μετακινούμε το τετράγωνο κατά μήκος h επί της L, ενώ ταυτόχρονα το περιστρέφουμε μια πλήρη φορά περί την L, παράγοντας έτσι μία στήλη με σπειροειδείς πτυχώσεις (όπως το τιρμπουσόν) και τετράγωνες διατομές.

(α) Να βρεθεί ο όγκος της στήλης.

(β) *Μάθετε γράφοντας* Πόσος θα είναι ο όγκος αν γίνουν δύο πλήρεις περιστροφές αντί μίας; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

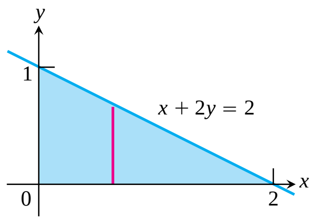
12. *Μάθετε γράφοντας* Ένα στερεό κείται μεταξύ επιπέδων που τέμνουν κάθετα τον άξονα x στα σημεία $x = 0$ και $x = 12$. Οι διατομές είναι κυκλικοί δίσκοι με διαμέτρους που εκτείνονται από την ευθεία $y = x/2$ έως την ευθεία $y = x$ όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Εξηγήστε για ποιον λόγο το στερεό αυτό έχει ίσο όγκο με τον ορθό κυκλικό κώνο ακτίνας βάσης 3 και ύψους 12.



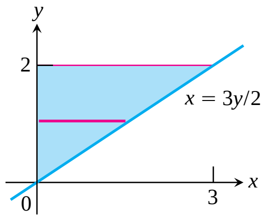
Στερεά εκ περιστροφής: Κυκλικές διατομές

Στις Ασκήσεις 13-16, βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε το σκιασμένο χωρίο ως προς τον εκάστοτε άξονα.

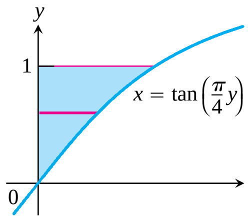
13. Περιστροφή ως προς τον άξονα x



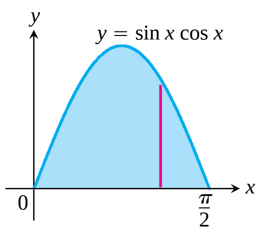
14. Περιστροφή ως προς τον άξονα y



15. Περιστροφή ως προς τον άξονα y



16. Περιστροφή ως προς τον άξονα x



Στις Ασκήσεις 17-22, βρείτε τους όγκους των στερεών που παράγονται αν περιστρέψουμε ως προς τον άξονα x τα χωρία που φράσσονται από τις ευθείες και τις καμπύλες που δίδονται. CD-ROM Δικτυότοπος

17. $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 2$

18. $y = x^3, \quad y = 0, \quad x = 2$

19. $y = \sqrt{9 - x^2}, \quad y = 0$

20. $y = x - x^2, \quad y = 0$

21. $y = \sqrt{\cos x}, \quad 0 \le x \le \pi/2, \quad y = 0, \quad x = 0$

22. $y = \sec x, \quad y = 0, \quad x = -\pi/4, \quad x = \pi/4$

Στις Ασκήσεις 23 και 24, βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε το εκάστοτε χωρίο ως προς την ευθεία που δίδεται.

23. Το χωρίο ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο και φράσσεται άνωθεν από την ευθεία $y = \sqrt{2}$, κάτωθεν από την καμπύλη $y = \sec x \tan x$, και εξ αριστερών από τον άξονα y. Άξονας περιστροφής είναι η ευθεία $y = \sqrt{2}$.

24. Το χωρίο ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο και φράσσεται άνωθεν από την ευθεία $y = 2$, κάτωθεν από την καμπύλη $y = 2\sin x$, $0 \le x \le \pi/2$, και εξ αριστερών από τον άξονα y. Άξονας περιστροφής είναι η ευθεία $y = 2$.

Στις Ασκήσεις 25-30, βρείτε τους όγκους των στερεών που παράγονται αν περιστρέψουμε ως προς τον άξονα y τα χωρία που φράσσονται από τις ευθείες και τις καμπύλες που δίδονται.

25. Το χωρίο περικλείεται από τις $x = \sqrt{5}\,y^2$, $x = 0$, $y = -1$, $y = 1$

26. Το χωρίο περικλείεται από τις $x = y^{3/2}$, $x = 0$, $y = 2$

27. Το χωρίο περικλείεται από τις $x = \sqrt{2 \sin 2y}$, $0 \le y \le \pi/2$, $x = 0$

28. Το χωρίο περικλείεται από τις $x = \sqrt{\cos(\pi y/4)}$, $-2 \le y \le 0$, $x = 0$

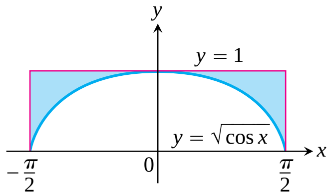
29. $x = 2/(y+1)$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 3$

30. $x = \sqrt{2y}/(y^2+1)$, $x = 0$, $y = 1$

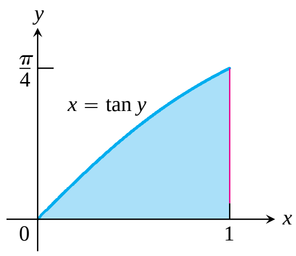
Στερεά εκ περιστροφής: Δακτυλιοειδείς διατομές

Στις Ασκήσεις 31 και 32, βρείτε τους όγκους των στερεών που παράγονται αν περιστρέψουμε τα γραμμοσκιασμένα χωρία ως προς τον εκάστοτε άξονα.

31. Άξονας x



32. Άξονας y



CD-ROM Δικτυότοπος

Στις Ασκήσεις 33-38, βρείτε τους όγκους των στερεών που παράγονται αν περιστρέψουμε ως προς τον άξονα x τα χωρία που φράσσονται από τις ευθείες και τις καμπύλες που δίδονται.

33. $y = x$, $y = 1$, $x = 0$

34. $y = 2\sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 0$

35. $y = x^2 + 1$, $y = x + 3$

36. $y = 4 - x^2$, $y = 2 - x$

37. $y = \sec x$, $y = \sqrt{2}$, $-\pi/4 \le x \le \pi/4$

38. $y = \sec x$, $y = \tan x$, $x = 0$, $x = 1$

Στις Ασκήσεις 39-42, βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε το εκάστοτε χωρίο ως προς τον άξονα y.

39. Το χωρίο περικλείεται από τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(1, 0)$, $(2, 1)$, και $(1, 1)$

40. Το χωρίο περικλείεται από τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(0, 1)$, $(1, 0)$, και $(1, 1)$

41. Το χωρίο ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο και φράσσεται άνωθεν από την παραβολή $y = x^2$, κάτωθεν από τον άξονα x, και εκ δεξιών από την ευθεία $x = 2$.

42. Το χωρίο ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο και φράσσεται εξ αριστερών από τον κύκλο $x^2 + y^2 = 3$, εκ δεξιών από την ευθεία $x = \sqrt{3}$, και άνωθεν από την ευθεία $y = \sqrt{3}$.

Στις Ασκήσεις 43 και 44, βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε ως προς τον εκάστοτε άξονα το χωρίο που δίδεται.

43. Το χωρίο ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο και φράσσεται άνωθεν από την καμπύλη $y = x^2$, κάτωθεν από τον άξονα x, και εκ δεξιών από την ευθεία $x = 1$. Άξονας περιστροφής είναι η ευθεία $x = -1$.

44. Το χωρίο ανήκει στο δεύτερο τεταρτημόριο και φράσσεται άνωθεν από την καμπύλη $y = -x^3$, κάτωθεν από τον άξονα x, και εξ αριστερών από την ευθεία $x = -1$. Άξονας περιστροφής είναι η ευθεία $x = -2$.

Όγκοι στερεών εκ περιστροφής

45. Βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε ως προς τον εκάστοτε άξονα το χωρίο που φράσσεται από την καμπύλη $y=\sqrt{x}$ και τις ευθείες $y = 2$ και $x = 0$.

(α) Περιστροφή ως προς τον άξονα x.

(β) Περιστροφή ως προς τον άξονα y.

(γ) Περιστροφή ως προς την ευθεία $y = 2$.

(δ) Περιστροφή ως προς την ευθεία $x = 4$.

46. Βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε ως προς τον εκάστοτε άξονα το τριγωνικό χωρίο που φράσσεται από τις ευθείες $y = 2x$, $y = 0$, και $x = 1$.

(α) Περιστροφή ως προς την ευθεία $x = 1$.

(β) Περιστροφή ως προς την ευθεία $x = 2$.

47. Βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε ως προς τον εκάστοτε άξονα το χωρίο που φράσσεται από την παραβολή $y = x^2$ και την ευθεία $y = 1$.

(α) Περιστροφή ως προς την ευθεία $y = 1$.

(β) Περιστροφή ως προς την ευθεία $y = 2$.

(γ) Περιστροφή ως προς την ευθεία $y = -1$.

48. Εκτελώντας την κατάλληλη ολοκλήρωση, βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε το τριγωνικό χωρίο που έχει κορυφές τα σημεία $(0, 0)$, $(b, 0)$, $(0, h)$, ως προς

(α) τον άξονα x

(β) τον άξονα y.

Θεωρία και εφαρμογές

49. *Όγκος σπείρας* Ο κυκλικός δίσκος $x^2 + y^2 \le a^2$ περιστρέφεται ως προς την ευθεία $x = b$ $(b > a)$ παράγοντας έτσι ένα στερεό σχήματος σαμπρέλας που καλείται *σπείρα*. Βρείτε τον όγκο του. (*Υπόδειξη:* $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2}\, dy = \pi a^2/2$, αφού το ολοκλήρωμα αυτό δεν είναι παρά το εμβαδόν ημικυκλικού χωρίου ακτίνας a.)

50. *Όγκος ενός μπωλ* Το σχήμα ενός μπωλ μπορεί να παραχθεί αν περιστρέψουμε ως προς τον άξονα y το τμήμα της καμπύλης $y = x^2/2$ από $y = 0$ έως $y = 5$.

(α) Βρείτε τον όγκο του μπωλ.

(β) *Συναφείς ρυθμοί* Αν γεμίζουμε το μπωλ με νερό, έχοντας σταθερό ρυθμό 3 κυβικών μονάδων μήκους ανά δευτερόλεπτο, πόσο γρήγορα θα ανεβαίνει η στάθμη του νερού όταν το νερό έχει βάθος 4 μονάδες μήκους;

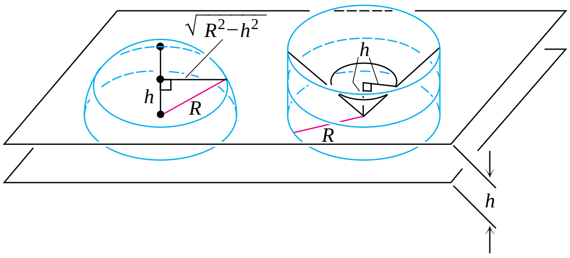
51. *Όγκος ενός μπωλ*

(α) Ένα ημισφαιρικό μπωλ ακτίνας a περιέχει νερό σε βάθος h. Βρείτε τον όγκο του νερού μέσα στο μπωλ.

(β) *Συναφείς ρυθμοί* Σε ένα τσιμεντένιο ημισφαιρικό μπωλ ακτίνας 5 m που βυθίζεται, εισρέει νερό με ρυθμό 0,2 $\mathrm{m^3/sec}$. Πόσο γρήγορα ανέρχεται η στάθμη του νερού στο μπωλ όταν το νερό έχει βάθος 4 m;

52. *Μάθετε γράφοντας* Εξηγήστε πώς θα μπορούσαμε να εκτιμήσουμε τον όγκο ενός στερεού εκ περιστροφής αν μετρούσαμε τη σκιά του στερεού που σχηματίζεται σε ένα τραπέζι παράλληλο προς τον άξονα περιστροφής από φωτεινή πηγή που βρίσκεται ακριβώς πάνω από το στερεό.

53. *Όγκος ημισφαιρίου* Αποδείξτε τον τύπο $V = (2/3)\pi R^3$ του όγκου ημισφαιρίου ακτίνας R, συγκρίνοντας τις διατομές του με τις διατομές στερεού ορθού κυκλικού κυλίνδρου ακτίνας R και ύψους R, από τον οποίο αποκόπτουμε έναν στερεό ορθό κυκλικό κώνο ακτίνας βάσης R και ύψους R, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

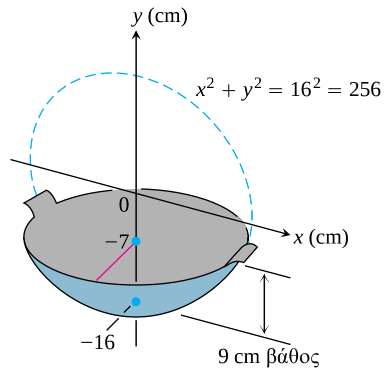


54. *Συμφωνία τύπων όγκων* Οι τύποι όγκων που χρησιμοποιούμε στον απειροστικό λογισμό συμφωνούν με τους καθιερωμένους τύπους που είναι γνωστοί από τη γεωμετρία, υπό την έννοια ότι εφαρμοζόμενοι στα ίδια συστήματα δίδουν το ίδιο αποτέλεσμα.

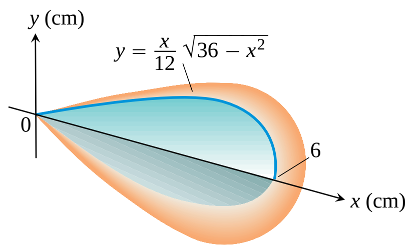
(α) Για παράδειγμα, δείξτε ότι αν περιστρέψουμε ως προς τον άξονα x το χωρίο που περικλείεται από το ημικύκλιο $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ και τον άξονα x, οπότε παράγεται μια στερεά σφαίρα, τότε ο τύπος του όγκου που αναφέραμε στην αρχή της παρούσας ενότητας θα δώσει αποτέλεσμα $(4/3)\pi a^3$, ως όφειλε.

(β) Με μεθόδους απειροστικού λογισμού βρείτε τον όγκο του ορθού κυκλικού κώνου ύψους h και ακτίνας βάσης r.

55. *Σχεδιάζοντας ένα wok* Σας έχει ανατεθεί η σχεδίαση ενός wok (είδος κινέζικου λεκανοειδούς τηγανιού), που έχει σχήμα ημισφαιρικού μπωλ με χειρολαβές. Μετά από μερικούς πειραματισμούς συμπεραίνετε ότι μπορείτε να σχεδιάσετε ένα wok χωρητικότητας περίπου 3 L, αν του δώσετε βάθος 9 cm και ακτίνα βάσης 16 cm. Για να βεβαιωθείτε, φαντάζεστε το wok σαν ένα στερεό εκ περιστροφής, του οποίου τον όγκο υπολογίζετε με ολοκλήρωμα. Με ακρίβεια ενός τετραγωνικού εκατοστού, πόσον όγκο βρίσκετε; (1 L = 1000 $\mathrm{cm^3}$.)



56. *Σχεδίαση βαριδίου εκκρεμούς* Σας έχει ανατεθεί η σχεδίαση ενός ορειχάλκινου (μπρούντζινου) βαριδίου εκκρεμούς, βάρους περίπου 190 g. Αποφασίζετε να του δώσετε το σχήμα του στερεού εκ περιστροφής που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Βρείτε τον όγκο του βαριδίου. Αν το συγκεκριμένο μείγμα μετάλλου που δουλεύετε έχει πυκνότητα 8,5 $\mathrm{g/cm^3}$, πόσο ζυγίζει το βαρίδιο (με ακρίβεια ενός γραμμαρίου);

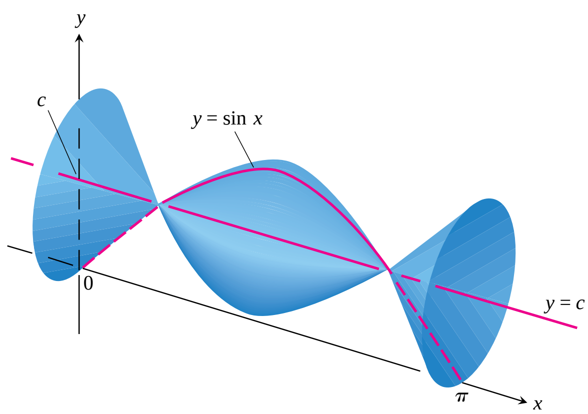


57. *Max-min* Η τοξοειδής καμπύλη $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$, περιστρέφεται ως προς την ευθεία $y = c$, $0 \le c \le 1$, παράγοντας το στερεό που φαίνεται στο επόμενο σχήμα.

(α) Βρείτε την τιμή του c που ελαχιστοποιεί τον όγκο του στερεού. Ποιος είναι ο ελάχιστος όγκος;

(β) Για ποια τιμή του c στο διάστημα [0, 1] μεγιστοποιείται ο όγκος του στερεού;

T (γ) *Μάθετε γράφοντας* Παραστήστε γραφικά τον όγκο του στερεού συναρτήσει του c, πρώτα για $0 \le c \le 1$ και κατόπιν σε μεγαλύτερο πεδίο ορισμού για το c. Τι παθαίνει ο όγκος του στερεού καθώς το c απομακρύνεται από το διάστημα [0, 1]; Είναι αυτό αναμενόμενο από φυσική άποψη; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

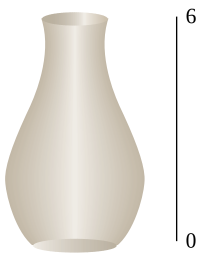


58. *Εφεδρική δεξαμενή καυσίμου* Σχεδιάζετε μια εφεδρική δεξαμενή καυσίμου που πρόκειται να τοποθετηθεί κάτω από την κύρια δεξαμενή καυσίμου ενός ελικοπτέρου, ώστε αυτό να αυξήσει την ακτίνα δράσης του. Μετά από μερικούς πειραματισμούς στο σχεδιαστήριο, καταλήγετε να δώσετε στη δεξαμενή το σχήμα της επιφάνειας που παράγεται περιστρέφοντας την καμπύλη $y = 1 - (x^2/16)$, $-4 \leq x \leq 4$, ως προς τον άξονα x (οι διαστάσεις είναι σε m).

(α) Πόση θα είναι η χωρητικότητα της δεξαμενής σε κυβικά μέτρα (με προσέγγιση ενός κυβικού μέτρου);

(β) Ένα κυβικό μέτρο χωρά 1000 λίτρα. Αν το ελικόπτερο διανύει 0,85 km για κάθε λίτρο καυσίμου, τότε πόσα επιπλέον km (με ακρίβεια ενός km) θα μπορεί να πετάξει το ελικόπτερο μετά την τοποθέτηση της εφεδρικής δεξαμενής;

59. *Δοχείο* Θέλουμε να εκτιμήσουμε τον όγκο ενός μικρού δοχείου αρώματος, με μόνα εργαλεία ένα κομπιουτεράκι, έναν σπάγγο, κι έναν κανόνα. Μετρούμε το ύψος του δοχείου και το βρίσκουμε ίσο με 6 cm. Κατόπιν χρησιμοποιούμε τον σπάγγο και τον κανόνα για να βρούμε τις διαδοχικές περιφέρειες του δοχείου (σε cm), μετρώντας ανά κατακόρυφα διαστήματα του μισού cm. (Καταγράφουμε τις μετρήσεις μας καθώς διατρέχουμε το δοχείο από πάνω προς τα κάτω.)



Περιφέρειες	
5,4	10,8
4,5	11,6
4,4	11,6
5,1	10,8
6,3	9,0
7,8	6,3
9,4	

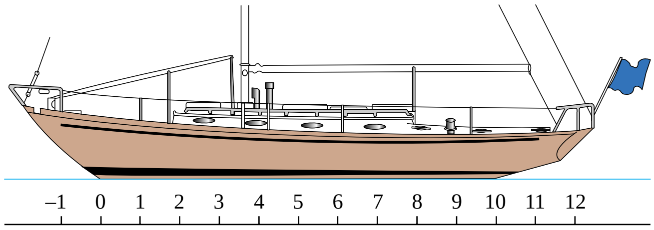
(α) Βρείτε τα εμβαδά των διατομών που αντιστοιχούν στις παραπάνω περιφέρειες.

(β) Εκφράστε τον όγκο του δοχείου ως ολοκλήρωμα ως προς y στο διάστημα $[0, 6]$.

(γ) Προσεγγίστε το ολοκλήρωμα κάνοντας χρήση του κανόνα του τραπεζίου με $n = 12$.

(δ) *Μάθετε γράφοντας* Προσεγγίστε το ολοκλήρωμα κάνοντας χρήση του κανόνα Simpson με $n = 12$. Ποια από τις δύο προσεγγίσεις εμπιστεύεστε περισσότερο; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

60. *Εκτόπισμα ιστιοφόρου* Προκειμένου να βρούμε τον όγκο του νερού που εκτοπίζει ένα ιστιοφόρο, διαμερίζουμε την ίσαλη γραμμή σε 10 ισομήκη υποδιαστήματα, μετράμε το εμβαδόν διατομής $A(x)$ του βυθισμένου τμήματος του σκάφους σε κάθε σημείο διαμέρισης, και χρησιμοποιούμε τον κανόνα Simpson για να εκτιμήσουμε την τιμή του ολοκληρώματος του $A(x)$ από την αρχή μέχρι το τέλος της ίσαλης γραμμής. Ο ακόλουθος πίνακας παραθέτει μετρήσεις που έγιναν στους «σταθμούς» 0 έως 10, όπως καλούνται τα σημεία διαμέρισης, για το ιστιοφόρο ονόματι *Pipedream*, τύπου «σλέπι» (ή «κέρκουρος», είδος μονοκάταρτου καϊκιού) που φαίνεται εδώ. Το μήκος των υποδιαστημάτων (απόσταση μεταξύ διαδοχικών σταθμών) είναι $h = 0{,}77$ m.



(α) Εκτιμήστε τον όγκο του εκτοπιζόμενου νερού (εκτόπισμα) του *Pipedream*, με ακρίβεια ενός κυβικού μέτρου.

Σταθμός	**Βυθισμένη επιφάνεια (m²)**
0	0
1	0,1
2	0,36
3	0,73
4	1,13
5	1,41
6	1,5
7	1,3
8	0,86
9	0,3
10	0

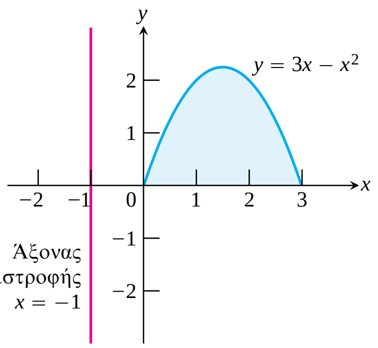
(β) Τα δεδομένα του πίνακα αναφέρονται σε θαλασσινό νερό, πυκνότητας 1025 kg/m^3. Πόσο είναι το εκτόπισμα (σε kg) του *Pipedream*; (Οι μετρήσεις προέρχονται από το βιβλίο *Skene's Elements of Yacht Design* του Francis S. Kinney (Dodd, Mead, 1962.)

(γ) *Πρισματικοί συντελεστές* Ο πρισματικός συντελεστής σκάφους είναι ο λόγος του εκτοπίσματος προς τον όγκο ενός πρίσματος το οποίο έχει ύψος ίσο με το μήκος της ίσαλης γραμμής και βάση ίση με το εμβαδόν της μέγιστης βυθισμένης διατομής του σκάφους. Τα καλύτερα ιστιοφόρα έχουν πρισματικούς συντελεστές που κυμαίνονται από 0,51 έως 0,54. Βρείτε τον πρισματικό συντελεστή του *Pipedream*, αν η ίσαλη γραμμή έχει μήκος 7,7 m και η μέγιστη βυθισμένη διατομή έχει εμβαδόν 1,5 m^2 (στον Σταθμό 6).

5.2 Μοντέλα όγκων με χρήση κυλινδρικών φλοιών

Υπολογισμός όγκων με κυλινδρικούς φλοιούς • Ο τύπος των φλοιών

Υπάρχει άλλος ένας τρόπος υπολογισμού όγκων στερεών εκ περιστροφής, που αποβαίνει χρήσιμος σε περιπτώσεις στις οποίες ο άξονας περιστροφής είναι κάθετος στον άξονα που περιέχει το «φυσικό» διάστημα ολοκλήρωσης. Αντί να αθροίζουμε τους όγκους λεπτών φετών, αθροίζουμε όγκους λεπτών κυλινδρικών φλοιών (κελυφών) οι οποίοι εφαρμόζουν ο ένας στον άλλο, καθώς κινούμαστε από τον άξονα περιστροφής προς τα έξω, ακριβώς όπως οι δακτύλιοι ενός δέντρου.



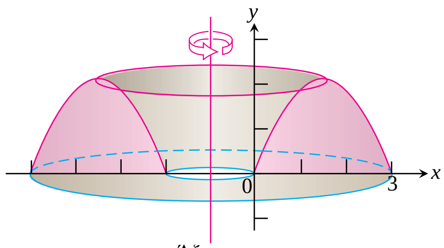
Σχημα 5.15 Γραφική παράσταση του χωρίου του Παραδείγματος 1, πριν την περιστροφή.

Υπολογισμός όγκων με κυλινδρικούς φλοιούς

Ακολουθεί ένα παράδειγμα χρήσης λεπτών κυλινδρικών φλοιών για την εύρεση του όγκου ενός στερεού.

Παράδειγμα 1 Εύρεση όγκου με χρήση φλοιών

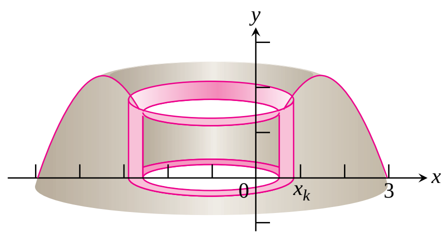
Το χωρίο που περικλείεται από τον άξονα x και από την παραβολή $y = f(x) = 3x - x^2$ περιστρέφεται ως προς την ευθεία $x = -1$ παράγοντας ένα στερεό (Σχήματα 5.15 και 5.16), του οποίου ζητείται ο όγκος.



Σχημα 5.16 Το χωρίο του Σχήματος 5.15 περιστρέφεται ως προς την ευθεία $x = -1$ σχηματίζοντας ένα στερεό «κέικ». Το φυσικό διάστημα ολοκλήρωσης είναι κατά μήκος του άξονα x, κάθετο στον άξονα περιστροφής. (Παράδειγμα 1)

Λύση Αν προσπαθούσαμε εδώ να ολοκληρώσουμε ως προς y θα αντιμετωπίζαμε δυσκολίες, αφού δεν είναι εύκολο να φέρουμε τη δοθείσα παραβολική εξίσωση σε μορφή που να δίδει το x συναρτήσει του y. (Για να δείτε τι εννοούμε, προσπαθήστε να υπολογίσετε τον όγκο χρησιμοποιώντας δακτυλιοειδείς διατομές.) Για να ολοκληρώσουμε ως προς x, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε *κυλινδρικούς φλοιούς,* που σημαίνει ότι «κόβουμε» το στερεό κατά έναν διαφορετικό τρόπο.

Βήμα 1: Αντί να διατμήσουμε σε λεπτά σφηνοειδή τεμάχια (όπως κόβουμε συνήθως το κέικ με το μαχαίρι), αποκόπτουμε *κυλινδρικούς* φλοιούς ως εξής. Με το μαχαίρι κατακόρυφο (παράλληλο στον άξονα περιστροφής) κάνουμε μια κυκλική τομή του στερεού κοντά στην εσωτερική τρύπα. Φτιάξαμε ήδη τον πρώτο κυλινδρικό μας φλοιό. Κατόπιν κόβουμε άλλον ένα κυλινδρικό φλοιό, με την ίδια διαδικασία, δηλαδή με κυκλική τομή κοντά στη (μεγαλύτερη τώρα) τρύπα στο εσωτερικό του στερεού, κ.ο.κ. Οι ακτίνες των κυλίνδρων σταδιακά αυξάνονται, και τα ύψη τους ακολουθούν το περίγραμμα της παραβολής: από μικρά που είναι μεγαλώνουν αρχικά, και κατόπιν μικραίνουν πάλι (Σχήμα 5.17). Κάθε φλοιός έχει πάχος Δx. Η ακτίνα του ισούται περίπου με $(1 + x_k)$, και το ύψος του είναι περίπου $3x_k - x_k^2$.



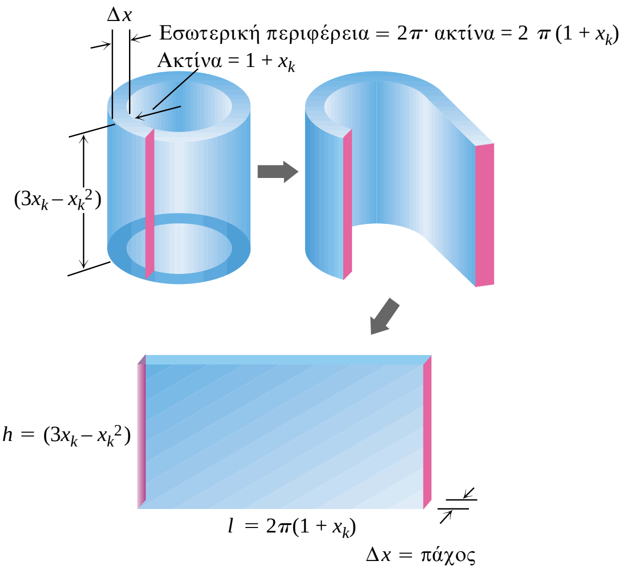
Σχημα 5.17 Αποκόπτουμε λεπτούς κυλινδρικούς φλοιούς, από μέσα προς τα έξω. Κάθε φλοιός βρίσκεται στη θέση x_k μεταξύ 0 και 3 και έχει πάχος Δx. (Παράδειγμα 1)

Βήμα 2: Αν ξετυλίξουμε τον κύλινδρο που βρίσκεται στο σημείο x_k και τον απλώσουμε στο επίπεδο, θα πάρουμε (κατ' ουσία) μια ορθογώνια πλάκα πάχους Δx (Σχήμα 5.18). Η εσωτερική περιφέρεια του κυλίνδρου είναι $2\pi \cdot \text{ακτίνα} = 2\pi(1 + x_k)$, που είναι και το μήκος της μεγάλης πλευράς της ορθογώνιας πλάκας. Συνεπώς, ο όγκος του (σχεδόν) ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου στερεού είναι

$$\begin{aligned} \Delta V &\approx \text{μήκος} \times \text{ύψος} \times \text{πάχος} \\ &\approx 2\pi(1 + x_k) \cdot (3x_k - x_k^2) \cdot \Delta x. \end{aligned}$$

Βήμα 3: Αν αθροίσουμε τους όγκους των επιμέρους κυλινδρικών φλοιών στο διάστημα $0 \le x \le 3$, προκύπτει ένα άθροισμα Riemann $\Sigma\, 2\pi(x_k + 1)(3x_k - x_k^2)\, \Delta x$. Αν τώρα πάρουμε το όριο καθώς το πάχος $\Delta x \to 0$, προκύπτει το ολοκλήρωμα

CD-ROM
Δικτυότοπος
Βιογραφικά στοιχεία
Αρχιμήδης
(287 π.Χ.- 212 π.Χ.)



Σχημα 5.18 Φανταστείτε ότι αποκόπτουμε έναν κυλινδρικό φλοιό και τον ξετυλίγουμε στο επίπεδο, οπότε προκύπτει ένα (περίπου) ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο στερεό. (Παράδειγμα 1)

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^3 2\pi(x+1)(3x - x^2)\,dx \\
&= \int_0^3 2\pi(3x^2 + 3x - x^3 - x^2)\,dx \\
&= 2\pi \int_0^3 (2x^2 + 3x - x^3)\,dx \\
&= 2\pi \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^3 \\
&= \frac{45\pi}{2} \text{ κυβικές μονάδες.}
\end{aligned}
$$

Ο τύπος των φλοιών

Υποθέστε ότι περιστρέφουμε το χρωματισμένο χωρίο του Σχήματος 5.19 ως προς έναν κατακόρυφο άξονα, ώστε να παραγάγουμε το στερεό. Μπορούμε να εκτιμήσουμε τον όγκο του στερεού προσεγγίζοντας το χωρίο με ορθογώνια παραλληλόγραμμα τα οποία ορίζονται από μια διαμέριση P του διαστήματος $[a, b]$ που διατρέχει την κάτω πλευρά του χωρίου. Το τυπικό προσεγγιστικό ορθογώνιο θα έχει πλάτος Δx_k και ύψος $f(c_k)$, όπου c_k είναι το μέσον της βάσης του ορθογωνίου. Ένας γεωμετρικός τύπος μάς λέει ότι ο όγκος του φλοιού που σαρώνεται από το περιστρεφόμενο ορθογώνιο ισούται με

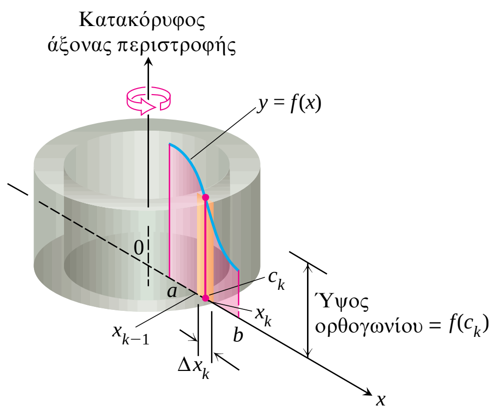
$$\Delta V_k = 2\pi \times \text{μέση ακτίνα φλοιού} \times \text{ύψος φλοιού} \times \text{πάχος}.$$

Προσεγγίζουμε τον όγκο του στερεού αθροίζοντας τους όγκους των φλοιών που σαρώνονται από τα n ορθογώνια της διαμέρισης P:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k .$$

Το όριο του αθροίσματος αυτού καθώς $\|P\| \to 0$ δίδει τον όγκο του στερεού:

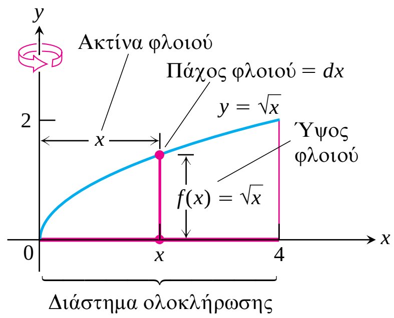
$$
\begin{aligned}
V &= \lim_{\|P\| \to 0} \sum \Delta V_k \\
&= \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix}\text{ακτίνα}\\ \text{φλοιού}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\text{ύψος}\\ \text{φλοιού}\end{pmatrix} dx.
\end{aligned}
$$



Σχημα 5.19 Ο φλοιός που σαρώνεται από το k-στό ορθογώνιο.

Τύπος των φλοιών για περιστροφή ως προς κατακόρυφο άξονα
Ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή ως προς κατακόρυφο άξονα του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα x και από τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης $y = f(x) \geq 0,\ 0 \leq a \leq x \leq b$, ισούται με

$$V = \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix}\text{ακτίνα}\\ \text{φλοιού}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{ύψος}\\ \text{φλοιού}\end{pmatrix} dx.$$



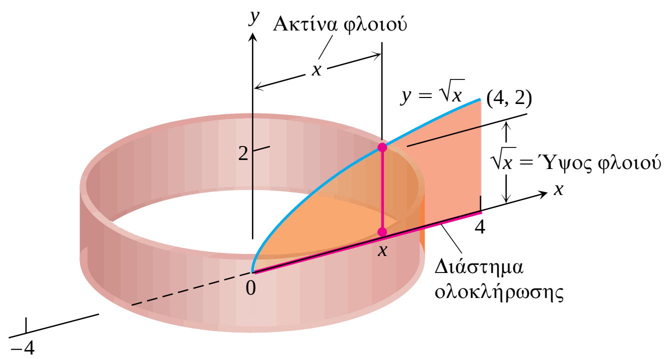
Σχημα 5.20 Το χωρίο, οι διαστάσεις του φλοιού, και το διάστημα ολοκλήρωσης του Παραδείγματος 2.

Παράδειγμα 2 Κυλινδρικοί φλοιοί που περιστρέφονται ως προς τον άξονα y

Το χωρίο που φράσσεται από την καμπύλη $y = \sqrt{x}$, τον άξονα x, και την ευθεία $x = 4$ περιστρέφεται ως προς τον άξονα y ώστε να παραγάγει ένα στερεό, του οποίου ζητείται ο όγκος.

Λύση

Βήμα 1: Σχεδιάζουμε το χωρίο καθώς και ένα ευθύγραμμο τμήμα που το διατρέχει *παράλληλα* προς τον άξονα περιστροφής (Σχήμα 5.20). Σημειώνουμε στο σχήμα το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος (δηλαδή το ύψος του φλοιού) και την απόσταση από τον άξονα περιστροφής (ακτίνα φλοιού). Το (απειροστό) «πάχος» του ευθύγραμμου τμήματος είναι το πάχος του φλοιού dx. (Για διδακτικούς λόγους, ο φλοιός φαίνεται στο Σχήμα 5.21.)



Σχημα 5.21 Ο φλοιός που σαρώνεται από το ευθύγραμμο τμήμα του Σχήματος 5.20.

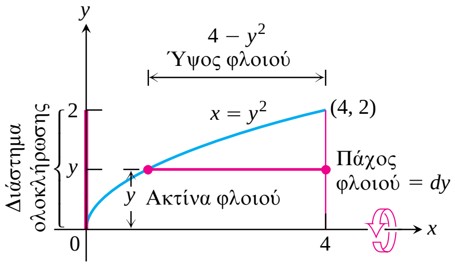
Βήμα 2: Βρίσκουμε τα όρια ολοκλήρωσης για τη μεταβλητή πάχους x (που παίρνει τιμές από $a = 0$ έως $b = 4$) και γράφουμε το ολοκλήρωμα όγκου με τη βοήθεια του τύπου των φλοιών:

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix}\text{ακτίνα}\\ \text{φλοιού}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{ύψος}\\ \text{φλοιού}\end{pmatrix} dx \\ &= \int_0^4 2\pi(x)(\sqrt{x})\, dx\,. \end{aligned}$$

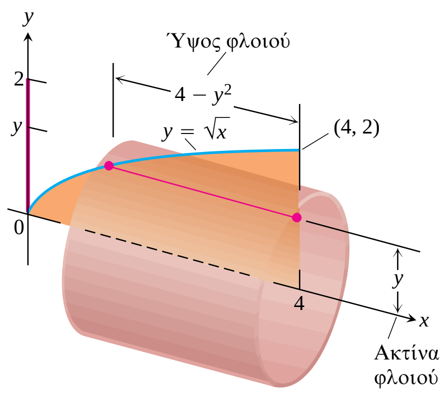
Βήμα 3: Ολοκληρώνουμε για να βρούμε τον όγκο:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 2\pi(x)(\sqrt{x})\, dx \\ &= 2\pi \int_a^b x^{3/2} dx - 2\pi \left[\frac{2}{5} x^{5/2}\right]_0^4 - \frac{128\pi}{5} \text{ κυβικές μονάδες.} \end{aligned}$$

Μέχρι τώρα, χρησιμοποιήσαμε κατακόρυφους άξονες περιστροφής. Αν έχουμε οριζόντιους άξονες, αντικαθιστούμε απλώς το x με το y.



ΣΧΗΜΑ 5.22 Το χωρίο, οι διαστάσεις του φλοιού και το διάστημα ολοκλήρωσης του Παραδείγματος 3.



ΣΧΗΜΑ 5.23 Ο φλοιός που σαρώνεται από το ευθύγραμμο τμήμα στο Σχήμα 5.22.

Παράδειγμα 3 Κυλινδρικοί φλοιοί που περιστρέφονται ως προς τον άξονα x

Το χωρίο που φράσσεται από την καμπύλη $y = \sqrt{x}$, τον άξονα x, και την ευθεία $x = 4$ περιστρέφεται ως προς τον άξονα x ώστε να παραγάγει ένα στερεό, του οποίου ο όγκος ζητείται.

Λύση

Βήμα 1: Σχεδιάζουμε το χωρίο, καθώς και ένα ευθύγραμμο τμήμα που το διατρέχει παράλληλα προς τον άξονα περιστροφής (Σχήμα 5.22). Σημειώνουμε στο σχήμα το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος (δηλαδή το ύψος του φλοιού) και την απόσταση από τον άξονα περιστροφής (ακτίνα φλοιού). Το (απειροστό) «πάχος» του ευθύγραμμου τμήματος είναι το πάχος του φλοιού dy. (Για καθαρά διδακτικούς λόγους, ο φλοιός παρατίθεται στο Σχήμα 5.23· τέτοιου είδους σχεδίαση δεν είναι αναγκαία κατά την επίλυση προβλημάτων.)

Βήμα 2: Βρίσκουμε τα όρια ολοκλήρωσης για τη μεταβλητή πάχους y (που παίρνει τιμές από 0 έως 2) και γράφουμε το ολοκλήρωμα όγκου με τη βοήθεια του τύπου των φλοιών:

$$V = \int_a^b 2\pi \begin{pmatrix}\text{ακτίνα}\\ \text{φλοιού}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{ύψος}\\ \text{φλοιού}\end{pmatrix} dx$$

$$= \int_0^2 2\pi(y)(4 - y^2)\, dy.$$

Βήμα 3: Ολοκληρώνουμε για να βρούμε τον όγκο:

$$V = \int_0^2 2\pi(y)(4 - y^2)\, dy$$

$$= 2\pi\left[2y^2 - \frac{y^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi \text{ κυβικές μονάδες.}$$

Πώς εφαρμόζουμε τη μέθοδο των φλοιών

Ανεξάρτητα της θέσης του άξονα περιστροφής (οριζόντιος ή κατακόρυφος), τα βήματα που ακολουθούμε για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο είναι τα εξής.

Βήμα 1. *Σχεδιάζουμε το χωρίο, καθώς και ένα ευθύγραμμο τμήμα* που το διατρέχει *παράλληλα* στον άξονα περιστροφής. *Σημειώνουμε στο σχήμα* το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος (ύψος φλοιού), την απόστασή του από τον άξονα περιστροφής (ακτίνα φλοιού) και το πάχος του φλοιού.

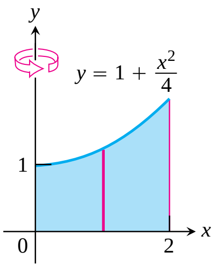
Βήμα 2. *Βρίσκουμε* τα όρια ολοκλήρωσης για τη μεταβλητή πάχους και γράφουμε το ολοκλήρωμα όγκου.

Βήμα 3. *Ολοκληρώνουμε* το γινόμενο 2π (ακτίνα φλοιού) (ύψος φλοιού) ως προς τη μεταβλητή πάχους (x ή y), για να βρούμε τον όγκο.

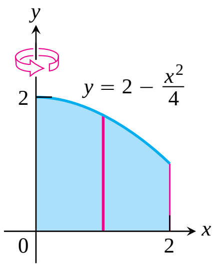
ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5.2

Στις Ασκήσεις 1-6, εφαρμόστε τη μέθοδο των φλοιών για να βρείτε τους όγκους των στερεών που παράγονται με την περιστροφή των γραμμοσκιασμένων χωρίων ως προς τον εκάστοτε υποδεικνυόμενο άξονα.

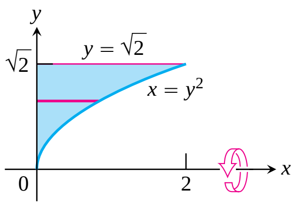
1.



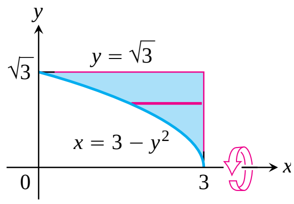
2.



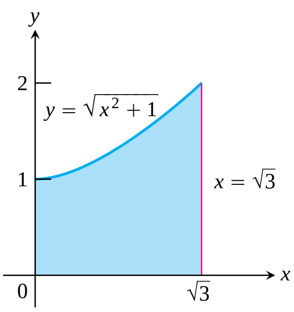
3.



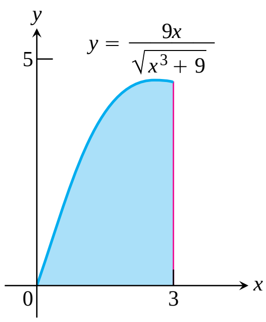
4.



5. Περιστροφή ως προς τον άξονα y



6. Περιστροφή ως προς τον άξονα y



Περιστροφή ως προς τον άξονα y

Εφαρμόστε τη μέθοδο των φλοιών για να βρείτε τους όγκους των στερεών που παράγονται αν περιστρέψουμε ως προς τον άξονα y τα χωρία που φράσσονται από τις καμπύλες και τις ευθείες που δίδονται στις Ασκήσεις 7-14.

7. $y = x, \quad y = -x/2, \quad x = 2$

8. $y = 2x, \quad y = x/2, \quad x = 1$

9. $y = x^2, \quad y = 2 - x, \quad x = 0$, για $x \geq 0$

10. $y = 2 - x^2, \quad y = x^2, \quad x = 0$

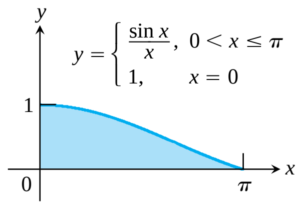
11. $y = 2x - 1, \quad y = \sqrt{x}, \quad x = 0$

12. $y = 3/(2\sqrt{x}), \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4$

13. Έστω $f(x) = \begin{cases} (\sin x)/x, & 0 < x \leq \pi \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

(α) Δείξτε ότι $xf(x) = \sin x,\ 0 \leq x \leq \pi$.

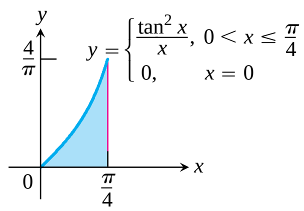
(β) Βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε το γραμμοσκιασμένο χωρίο ως προς τον άξονα y.



14. Έστω $g(x) = \begin{cases} (\tan x)^2/x, & 0 < x \leq \pi/4 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(α) Δείξτε ότι $xg(x) = (\tan x)^2,\ 0 \leq x \leq \pi/4$.

(β) Βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε το γραμμοσκιασμένο χωρίο ως προς τον άξονα y.



Περιστροφή ως προς τον άξονα x

Εφαρμόστε τη μέθοδο των φλοιών για να βρείτε τους όγκους των στερεών που παράγονται αν περιστρέψουμε ως προς τον άξονα x τα χωρία που φράσσονται από τις καμπύλες και τις ευθείες των Ασκήσεων 15-22.

15. $x = \sqrt{y}, \quad x = -y, \quad y = 2$

16. $x = y^2, \quad x = -y, \quad y = 2, \quad y \geq 0$

17. $x = 2y - y^2, \quad x = 0$

18. $x = 2y - y^2, \quad x = y$

19. $y = |x|, \quad y = 1$

20. $y = x, \quad y = 2x, \quad y = 2$

21. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad y = x - 2$

22. $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad y = 2 - x$

Περιστροφή ως προς οριζόντιες ευθείες

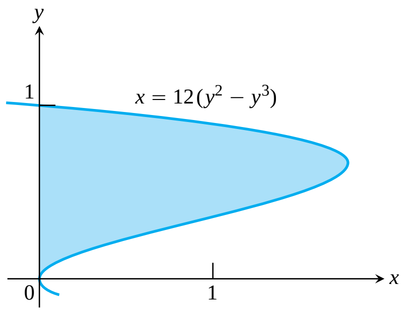
Στις Ασκήσεις 23 και 24, εφαρμόστε τη μέθοδο των φλοιών για να βρείτε τους όγκους των στερεών που παράγονται αν περιστρέψουμε τα γραμμοσκιασμένα χωρία ως προς τον εκάστοτε υποδεικνυόμενο άξονα.

23. **(α)** Ο άξονας x

(β) Η ευθεία $y = 1$

(γ) Η ευθεία $y = 8/5$

(δ) Η ευθεία $y = -2/5$

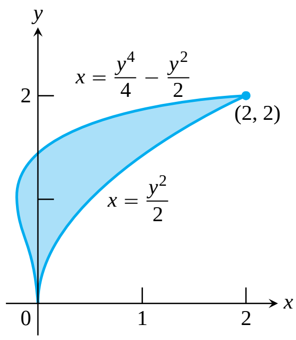


24. **(α)** Ο άξονας x

(β) Η ευθεία $y = 2$

(γ) Η ευθεία $y = 5$

(δ) Η ευθεία $y = -5/8$



Σύγκριση μεταξύ της μεθόδου των δακτυλιοειδών διατομών και της μεθόδου των φλοιών

Υπάρχουν μερικά χωρία ολοκλήρωσης που επιδέχονται εφαρμογή τόσο της μεθόδου των δακτυλιοειδών διατομών όσο και αυτής των φλοιών, για την εύρεση του στερεού που παράγεται αν τα περιστρέψουμε ως προς κάποιον άξονα. Αλλά αυτό δεν συμβαίνει πάντα. Για παράδειγμα, όταν περιστρέφουμε ένα χωρίο ως προς τον άξονα y και χρησιμοποιούμε δακτυλιοειδείς διατομές, πρέπει να ολοκληρώσουμε ως προς y. Όμως ενδέχεται να μην είναι δυνατή ή εύκολη η έκφραση της ολοκληρωτέας ποσότητας συναρτήσει του y. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η μέθοδος των φλοιών μας επιτρέπει να ολοκληρώσουμε ως προς x. Δείτε σχετικά τις Ασκήσεις 25 και 26.

25. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε διαδοχικά ως προς κάθε άξονα συντεταγμένων (δηλ. x και y) το χωρίο που φράσσεται από τις καμπύλες $y = x$ και $y = x^2$, με χρήση της μεθόδου

(α) των φλοιών

(β) των δακτυλιοειδών διατομών.

26. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού που παράγεται αν περιστρέψουμε το τριγωνικό χωρίο που φράσσεται από τις ευθείες $2y = x + 4$, $y = x$, και $x = 0$,

(α) ως προς τον άξονα x, με τη μέθοδο των δακτυλιοειδών διατομών

(β) ως προς τον άξονα y, με τη μέθοδο των φλοιών

(γ) ως προς την ευθεία $x = 4$, με τη μέθοδο των φλοιών

(δ) ως προς την ευθεία $y = 8$, με τη μέθοδο των δακτυλιοειδών διατομών.

Επιλέγοντας μεταξύ δακτυλιοειδών διατομών και φλοιών

Στις Ασκήσεις 27-32, υπολογίστε τους όγκους των στερεών που παράγονται αν περιστρέψουμε ως προς τους αναγραφόμενους άξονες τα χωρία που δίδονται. Χρησιμοποιήστε δακτυλιοειδείς διατομές ή φλοιούς, ό,τι από τα δύο σας φαίνεται προτιμότερο.

27. Το τριγωνικό χωρίο έχει κορυφές τα σημεία (1, 1), (1, 2), και (2, 2), και περιστρέφεται ως προς

(α) τον άξονα x **(β)** τον άξονα y

(γ) την ευθεία $x = 10/3$ **(δ)** την ευθεία $y = 1$

28. Το χωρίο φράσσεται από τις καμπύλες $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 0$, και περιστρέφεται ως προς

(α) τον άξονα x **(β)** τον άξονα y

(γ) την ευθεία $x = 4$ **(δ)** την ευθεία $y = 2$

29. Το χωρίο ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο και φράσσεται από την καμπύλη $x = y - y^3$ και τον άξονα y, και περιστρέφεται ως προς

(α) τον άξονα x **(β)** την ευθεία $y = 1$

30. Το χωρίο ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο και φράσσεται από τις $x = y - y^3$, $x = 1$, και $y = 1$, και περιστρέφεται ως προς

(α) τον άξονα x **(β)** τον άξονα y

(γ) την ευθεία $x = 1$ **(δ)** την ευθεία $y = 1$

31. Το χωρίο φράσσεται από τις $y = \sqrt{x}$ και $y = x^2/8$, και περιστρέφεται ως προς

(α) τον άξονα x

(β) τον άξονα y

32. Το χωρίο φράσσεται από τις $y = 2x - x^2$ και $y = x$, και περιστρέφεται ως προς

(α) τον άξονα y

(β) την ευθεία $x = 1$

33. Το χωρίο ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο και φράσσεται άνωθεν από την καμπύλη $y = 1/x^{1/4}$, εξ αριστερών από την ευθεία $x = 1/16$, και κάτωθεν από την ευθεία $y = 1$. Το χωρίο αυτό περιστρέφεται ως προς τον άξονα x. Υπολογίστε τον όγκο του παραγόμενου στερεού, με χρήση

(α) της μεθόδου των δακτυλιοειδών διατομών

(β) της μεθόδου των φλοιών.

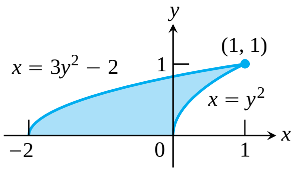
34. Το χωρίο ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο και φράσσεται άνωθεν από την καμπύλη $y = 1/\sqrt{x}$, εξ αριστερών από την ευθεία $y = 1/4$, και κάτωθεν από την ευθεία $y = 1$. Το χωρίο αυτό περιστρέφεται ως προς τον άξονα y. Υπολογίστε τον όγκο του παραγόμενου στερεού, με χρήση

(α) της μεθόδου των δακτυλιοειδών διατομών

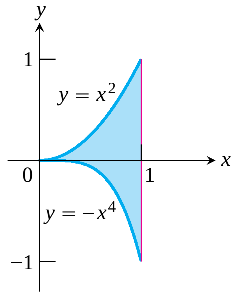
(β) της μεθόδου των φλοιών.

Επιλέγοντας μεταξύ κυκλικών δίσκων, δακτυλιοειδών διατομών και φλοιών

35. Το χωρίο που φαίνεται στο σχήμα πρόκειται να περιστραφεί ως προς τον άξονα x, ώστε να παραχθεί ένα στερεό. Ποιες από τις μεθόδους υπολογισμού του όγκου του στερεού αυτού (κυκλικών δίσκων, δακτυλιοειδών διατομών ή φλοιών) μπορείτε να χρησιμοποιήσετε; Πόσα ολοκληρώματα πρέπει να υπολογίσετε σε κάθε περίπτωση; Εξηγήστε.



36. Το χωρίο που φαίνεται στο σχήμα πρόκειται να περιστραφεί ως προς τον άξονα y ώστε να παραχθεί ένα στερεό. Ποιες από τις μεθόδους υπολογισμού του όγκου του στερεού αυτού (κυκλικών δίσκων, δακτυλιοειδών διατομών ή φλοιών) μπορείτε να χρησιμοποιήσετε; Πόσα ολοκληρώματα πρέπει να υπολογίσετε σε κάθε περίπτωση; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.



5.3 Μήκη καμπυλών στο επίπεδο

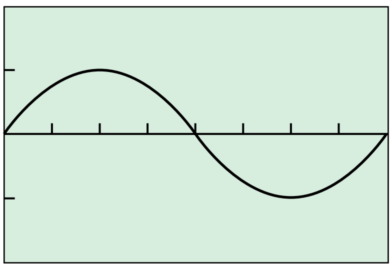
Ένα ημιτονοειδές «κύμα» • Μήκος λείας καμπύλης • Όταν η dy/dx παρουσιάζει ασυνέχειες • Διαφορικές συντομογραφίες • Παραμετρικός τύπος μήκους τόξου

Πόσα χιλιόμετρα διανύουμε διασχίζοντας με τα πόδια το χείλος του φαραγγιού Grand Canyon; Πώς θα εκτιμήσει ένας μηχανικός το κόστος ασφαλτόστρωσης μιας ορεινής εθνικής οδού της οποίας γνωρίζει το συνολικό μήκος; Για να απαντήσουμε σε τέτοιου είδους ερωτήματα, πρέπει να μπορούμε να υπολογίζουμε μήκη καμπυλών.

Ένα ημιτονοειδές «κύμα»

Πόσο μήκος έχει η καμπύλη του ημιτονοειδούς κύματος του Σχήματος 5.24;

Η συνήθης έννοια του μήκους κύματος αναφέρεται στη θεμελιώδη περίοδο, που για $y = \sin x$ ισούται με 2π. Αλλά πόσο μήκος έχει η ίδια η ημιτονοειδής καμπύλη; Με άλλα λόγια, αν κρατούσαμε σταθερό το ένα άκρο της καμπύλης στο 0, και «τεντώναμε» την καμπύλη κατά μήκος του άξονα x, μέχρι ποιο σημείο θα έφθανε το άλλο άκρο;



$[0, 2\pi]$ επί $[-2, 2]$

Σχημα 5.24 Σε μια περίοδο, το μήκος της ημιτονοειδούς καμπύλης είναι μεγαλύτερο του 2π.

Παράδειγμα 1 Μήκος ημιτονοειδούς καμπύλης

Πόσο μήκος έχει η καμπύλη $y = \sin x$ από $x = 0$ έως $x = 2\pi$;

Λύση Απαντούμε στο ερώτημα αυτό με ολοκλήρωση, εφαρμόζοντας την προσφιλή μας πλέον μέθοδο διαίρεσης του όλου σε μετρήσιμα μέρη. Διαμερίζουμε λοιπόν το $[0, 2\pi]$ σε υποδιαστήματα τόσο μικρά, ώστε τα τμήματα της καμπύλης (που τα λέμε «τόξα») σε κάθε υποδιάστημα να είναι σχεδόν ευθύγραμμα. Έτσι, κάθε τόξο σχεδόν ταυτίζεται με το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα άκρα του, και άρα το μήκος του τόξου θα μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά από το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος.

Το Σχήμα 5.25 δείχνει το ευθύγραμμο τμήμα που προσεγγίζει το